website

# Compendio de ponencias presentados en el

# COLOQUIO DE HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA

10,11 y 12 de agosto 2022


## EDITORES

ESPTIBEN ROJAS BERNILLA

JESÚS P. AVALOS RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TRUJILLO

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

UNIVERSIDAD DE MAGALLANES


https://revistas.unitru.edu.pe/index.php/BOCIENMAT

## Editores:

**Esptiben Rojas Bernilla**
Universidad de Magallanes
Punta Arenas, Chile

**Jesús Pascual Avalos Rodríguez**
Universidad Nacional de Trujillo
Trujillo, Perú

Compendio de ponencias presentados en el
COLOQUIO DE HISTORIA Y FILOSOFÍA
DE LA MATEMÁTICA -2022
38pp.

# Organización

## Comité organizador:

| | |
|---|---|
| Presidenta | Higidia Rosa Moreno Pachamango |
| | José Andrés Ynoñán Jiménez |
| | Esptiben Rojas Bernilla |
| | Elmis García Pérez |
| | Wilson Maco Vásquez |
| | Lucy Salazar Rojas |
| | José Díaz Leiva |
| | Waymer Alfonso Barreto Vega |
| | Jesús P. Avalos Rodríguez |
| | Walter Arriaga Delgado |
| | Miguel Angel Baca Ferreyros |
| | Daniel Marciano Arteaga Blas |
| | Miriam María Estrada Huancas |

## Colaboradores:

Oswaldo Briceño Cotrina
Anderson Javier Zavaleta Simón
Luis Lara Romero
Juan Rojas Bernilla
Olinda Luzmila Vigo Vargas

## Instituciones auspiciadoras

# Prefacio

El *Coloquio de Historia y Filosofía de la Matemática*, es un esfuerzo conjunto entre la Universidad Nacional de Trujillo (Perú), la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo (Perú) y la Universidad de Magallanes (Chile). En el marco del Proyecto de Responsabilidad Social: *La Historia de la Matemática en la Formación del Matemático Investigador y Docente en Matemática en Educación Básica Regular* del Departamento Académico de Matemática de la Universidad Nacional de Trujillo. Se ha organizado este encuentro académico (modalidad virtual), con el objetivo de generar un espacio de reflexión y difusión de temas relevantes en el ámbito de la Historia y Filosofía de la Matemática.

La Historia demuestra que el pensamiento filosófico, a través de sus distintas escuelas, tienen una gran influencia en nuestro desarrollo humano, el conocimiento Matemático no es la excepción. Uno de los grandes matemáticos de la Historia, el francés *Henry Poincaré*, decía que el verdadero método para prever el futuro de las matemáticas consistía en estudiar su pasado, bajo esta perspectiva la Historia y Filosofia de la Matemática, desde sus bases metodológicas, constituyen una parte importante en la formación de investigadores y profesores de matemática.

El *Coloquio de Historia y Filosofía de la Matemática*, es una instancia académica de reflexión y profundización de los aspectos históricos - filosóficos de la Matemática, que permite aportar a la formación de matemáticos profesionales y/o profesores de matemáticas, además de su socialización en la comunidad académica y público en general.

El presente compendio contiene las ponencias del *Coloquio de Historia y Filosofía de la Matemática*, realizada los días 10 al 13 de Agosto del 2022. Los expositores son destacados expertos e investigadores en el área de la Historia y Filosofía de la Matemática de Perú, Chile, México, Colombia, Guatemala y Panamá.

Expresamos nuestro agradecimiento, a los destacados expositores, y a los asistentes a este evento. Un agradecimiento especial a los señores rectores de la Universidad Nacional de Trujillo, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, y la Universidad de Magallanes, por su constante apoyo institucional, que han hecho posible el desarrollo de este Coloquio.

**Comité organizador**

# Índice

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**
01A99

**Keywords:**
Filosofía de las matemáticas, formalismo, logicismo, número, intuicionismo, concepto de número.

**Author for correspondence:**
José Luis Guevara Rodríguez
e-mail:
guevararodriguezjoseluis@gmail.com

COLOQUIO de
HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA
PUBLICACIONES

# ¿CAMBIÓ EL CONCEPTO DE NÚMERO EN LA CRISIS DE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA?

José Luis Guevara Rodríguez[1]

[1]guevararodriguezjoseluis@gmail.com

## 1. Descripción de la propuesta

Inicialmente, se mostrará un primer cambio del concepto número, a raíz de la existencia de las magnitudes inconmensurables; ya que, dicho suceso provocó que la cosmovisión pitagórica entrará en conflicto con su postulado ¿todo es número? porque se descubrió que en la geometría no es posible establecer mediante una correspondencia numérica la relación entre la diagonal y un lado del cuadrado unitario. Posterior a esto, Platón propone otro cambio conceptual del número, postulando al número como Idea. Este cambio no es aceptado por Aristóteles, quien propone que él número es una forma de predicar cosas del mundo sensible y que lo denominó en una de sus categorías como cantidad.
Euclides fue uno de los matemáticos más representativos de la época griega y esto se debe a su obra Elementos, en la cual sistematizó de forma hipotético-deductiva el conocimiento matemático de aquel momento. Particularmente, en esta obra el número ya no predica al mundo sensible si no a un universo teórico, provocando otro cambio conceptual. Del mismo modo, aparece el matemático Belga Simón Stevin (1548-1620), mostrando la posibilidad de unir lo discreto y lo continuo, y provocando la introducción del uno como número (Guevara, 2021).
Para la misma época de Stevin, René Descartes (1596-1650) logra un hito en la Geometría, en el que consolida al segmento unidad; es decir, un segmento cuya longitud es uno. De esta manera, la obra de Descartes da un respaldo a la propuesta de Stevin y proporciona un estatus ontológico a los números fraccionarios. Esto significa que, si el número uno tiene la propiedad de ser continuo, entonces es posible hacer divisiones de él, en otras palabras, fraccionarlo o quebrarlo.

En el siglo XIX, el matemático Neerlandés William Hamilton mediante la relación entre geometría y álgebra abrió la puerta a un nuevo concepto de número, construyendo los fundamentos de los números complejos, los cuales en la época de Descartes no fueron aceptados como tal, sino que se consideraba como soluciones extrañas o sin sentido de ciertas ecuaciones. En esa misma dirección, se aceptan los números negativos gracias a la obra de Hermann Hankel (1839-1873), y esto trae consigo el establecimiento de un nuevo cambio en el concepto de número, ya no fundamentado en la relación discreto-continuo, sino de una forma estructural.

En el transcurrir del Siglo XIX y XX obtuvo una gran relevancia la teoría de conjuntos, sobre la cual se buscaba fundamentar las matemáticas. Dos personajes importantes en este desarrollo fueron George Cantor y Richard Dedekind. Dedekind se dedicó a la Aritmética, mientras que Cantor asociaba a cada conjunto un número que denominó Alef.

No obstante, Cantor definió lo que es un conjunto, pero debido a que su definición hace uso de la intuición, la teoría de conjuntos entró en paradojas, provocando que la idea de fundamentar mediante la teoría de conjuntos no resulte favorable. A raíz de esta crisis, matemáticos se proponen la tarea de verificar, hasta que parte de las matemáticas se pueden liberar de la intuición y por ende de las paradojas.
Matemáticos como Frege y Russell, proponen que una salida a dichas paradojas está en la ambigüedad del lenguaje y proponen para salir de la crisis que la Aritmética es una ramificación de la Lógica: el proyecto Logicista. De manera simultanea, aparecen el Intuicionismo y Formalismo.

La presente exposición es mostrar que el número resulta ser un objeto lógico desde la perspectiva Logicista, un objeto formal (Formalismo) y un objeto que depende de la intuición del tiempo (Intuicionismo) y que entre las escuelas siempre hay cambios de perspectiva ontológica y epistemológica.

## Referencias


1. Falk, M. (2012). Corrientes del pensamiento matemático del siglo XX (Vols. 1?2). Universidad Antonio Nariño.
2. Guevara, J. (2021). ¿Cambió el concepto de número en la crisis de los fundamentos de la matemática? (tesis de pregrado).
3. Ministerio de Educación Nacional. (1998). serie lineamientos curriculares Matemáticas. $https : //www.mineducacion.gov.co/1759/articles - 339975_{m}atematicas.pdf$


## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/gtjMpz8gD40

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

# ELEMENTOS HISTÓRICOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

José Vicente Aymerich Miralles[1]

Universidad Jaume I - Castellón - España

[1]aymerich@uji.es

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**

01A99

**Keywords:**

Polynomial of Villarreal, binomial of Newton.

**Author for correspondence:**

José Vicente Aymerich Miralles

e-mail: aymerich@uji.es

## 1. Descripción de la propuesta

Las personas que estudian los hechos históricos de cualquier disciplina se dedican a reconstruir el pasado y los procesos históricos con el fin de elaborar un discurso que cohesione los hechos históricos. Ahora bien, si las personas que relatan los hechos históricos lo hacen en un aula le dan una nueva dimensión al relato ya que buscan motivar a los estudiantes en sus procesos de aprendizajes. Enfrentarse a hechos históricos propicia desarrollar competencias tales como: capacidad para comprender ideas, problemas y sus soluciones, y al mismo tiempo transmitir la información y formación adquirida.

En mis primeros años como profesor de Análisis Matemático, provocaba aprendizajes sin tener presente la génesis de los conceptos que ponía en juego, tuvo que pasar mucho tiempo hasta cambios en este sentido. Es imprescindible conocer la génesis de las ecuaciones diferenciales como resultado de los intentos de resolución de problemas de valor inicial, interesándose por la existencia y unicidad de las soluciones de dichos problemas y de la estabilidad de las mismas, problemas de contorno, comportamiento cualitativo de las soluciones, que explican la solución del problema y permiten generalizar los resultados.

A veces exponemos elementos históricos con errores, desde la perspectiva actual, para hacer notar a los estudiantes las dificultades que tuvieron que afrontar sus creadores en la presentación de sus descubrimientos.

En un afán de sistematizar el estudio de los hechos históricos de las ecuaciones diferenciales podríamos señalar cuatro etapas bien diferenciadas:

1. **Etapa inicial:** Desde el triángulo infinitesimal $dx - dy - ds$ de Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1643-1716) hasta la publicación del teorema de existencia de solución de Cauchy en el año 1820. Plantean resolver el problema: Dada una relación entre dos cantidades y sus fluxiones (derivadas), cómo hallar una relación entre los fluentes (cantidades), es decir, cómo encontrar una curva caracterizada por una propiedad dada de sus tangentes. Todos los esfuerzos de los matemáticos de esta etapa se centran en cambiar variables para reducir el problema al cálculo de cuadraturas. A partir de problemas geométricos y mecánicos, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y Jean le Rond D?Alembert (1717-1783), introducen las bases de la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficiente variables.
2. **Etapa del rigor:** Se inicia con el teorema de Cauchy desde 1820 a 1870. La primera inquietud sobre la existencia de solución de la EDO lo podemos encontrar en los trabajos de Euler con su método de las poligonales. el cual se usa en la actualidad como un método numérico, lo continúa Cauchy (1789-1857), Hacia 1810 se admitía la existencia las ecuaciones diferenciales se pueden resolver, pues nada garantiza que la serie sea convergente hacia la función deseada. En 1824, en la Escuela Politécnica de Paris, Cauchy expone el método de las poligonales de Euler que permiten probar la existencia de soluciones del problema de valor inicial
   El método utilizado en la demostración de este teorema proporciona algoritmos para obtener aproximaciones de la solución con el grado de exactitud deseada, así como para medir el error de la aproximación, por lo que sirvió de fundamento para los procesos de integración numérica que fueron elaborados durante el siglo XIX. En 1836, Jacques Sturm (1803-1855) se da cuenta que la mayoría de las EDOs lineales de segundo orden no se pueden resolver analíticamente y aporta un nuevo método para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden, estudiando sus propiedades directamente desde la ecuación. Analiza cómo se comportan las raíces de la solución al variar las condiciones iniciales o los coeficientes de la ecuación.
   En 1854 Briot y N. Bouquet simplificaron la demostración de Cauchy y analizaron el caso en que f(x, y) es singular en un punto del campo complejo, comprobando que el radio de convergencia es el máximo posible hasta que se alcanza la singularidad. Hacia 1 869 seguía sin resolverse el problema de la unicidad de una ecuación diferencial. En 1980, Peano trató la existencia local de soluciones e introdujo las inecuaciones diferenciales probando que el ínfimo de las supersoluciones y el supremo de las subsoluciones son soluciones del problema de Cauchy.
3. **La tercera etapa:** comienza con la aplicación de la teoría de los grupos continuos de Sophus Lie a las ecuaciones diferenciales en el año 1870. Lie introdujo la noción de los grupos continuos, para unificar y extender varios métodos especializados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Así, dada una ecuación diferencial, se debería encontrar un grupo de transformaciones que dejara invariante la ecuación y por medio del estudio de las propiedades del grupo, simplificar la ecuación para resolverla.
4. **La cuarta etapa:** comienza con los Teorema de unicidad de Picard (1856-1941) en el año 1890 y de Lindelöf en 1894. Los teoremas de Picard-Lindelöf resuelven el problema de la unicidad de la solución si la función f(x.y) verifica además una condición más fuerte que la requerida en las hipótesis del teorema de Cauchy-Peano: la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable.
   Jules Henri Poincaré (1854-1912) estudió las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes racionales, y comprobó que ciertas funciones que se pueden obtener a partir de cocientes de dos soluciones independientes admiten grupos de transformaciones análogos a los de las funciones elípticas. Estudió condiciones para que las ecuaciones diferenciales tengan integrales algebraicas. Muchas de estas técnicas fueron usadas en

el estudio de los problemas de la mecánica clásica y, en particular, en el problema de los tres cuerpos. en su estudio sobre Mecánica Celeste señala la importancia de las propiedades cualitativas de las soluciones reales de las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento y la debilidad de los métodos analíticos, creando así su teoría *geométrica* de las ecuaciones diferenciales.

Los trabajos de Aleksandre Liapunov (1857-1918) sentaron bases sólidas para la naciente Teoría Cualitativa. Desarrolló sus investigaciones alrededor del problema general de la estabilidad de los movimientos, cuyos resultados siguen en vigor a día de hoy. Se deben a él el primer y segundo método que lleva su nombre. Sus trabajos se centran en la estabilidad, estabilidad asintótica, estabilidad de ecuaciones diferenciales funcionales y análisis no lineal.

## Referencias


1. Bell, E. T., Historia de las Matemáticas. (2ª ed.). Edic. Fondo de Cultura Económica, 1985.
2. Bourbaki. N., Elementos de Historia de las Matemática. Alianza Ed. 1976.
3. Boyce, W. E., DiPrima, R. C.: Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Editorial Limusa. (1ª edición), 1967
4. Boyer C. B., Historia de la matemática, versión española de Mariana Martínez Pérez, Alianza Universidad, 1986.
5. Kline, M. El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. (Vol. I, II y III). Alianza. 2012
6. Collette Jean-Paul, Historia de Las Matemáticas I y II. Ed. s. XXI 1985.
7. R. y Robbins R., ¿Qué es la matemática?, Aguilar, Madrid, 1967
8. Dunham, W., Viaje a través de los genios, Pirámide. Madrid (1990).
9. Durán A. J., "Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo", Alianza Editorial, Madrid (1996).
10. Durán J. A., Cauchy: hijo rebelde de la revolución, Nivola, 2007
11. Muñoz Santoja, J., Newton: el umbral de la ciencia moderna, Nivola. Madrid (1999)
12. Priestley W. M., Calculus: an historical approach, Springer-Verlag, Nueva York, 1979.
13. Rey Pastor J. y Babini J., Historia de la matemática, Ed. Gedisa, 2000
14. Rúbnikov K., Historia de la matemática, Editorial Mir, 1987.
15. Sánchez Fernández C. y Valdés Castro C., Los Bernoulli. Geómetras y viajeros. Nivola, 2007.
16. Simmons, F., Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas. McGraw-Hill, 1988.
17. Stewart, Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años, Ed. Crítica, 2008.
18. Wussing H., Lecciones de historia de las matemáticas, Siglo XXI de España, 1998.


## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/YmReE-GRIAE

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**
01A99

**Keywords:**
Polynomial of Villarreal, binomial of Newton.

**Author for correspondence:**
José Ismael Arcos Quezada
e-mail: ismael_arcos@msn.com

COLOQUIO de
HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA
PUBLICACIONES

# DESARROLLO DE LAS IDEAS DEL CÁLCULO DESDE UNA PERSPECTIVA DOCENTE

José Ismael Arcos Quezada[1]

Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de México, México

[1]ismael_arcos@msn.com

## 1. Descripción de la propuesta

En este documento se describen, brevemente, algunos de los momentos en la Historia de las Matemáticas, en los que emergieron o se transformaron los conceptos de lo que ahora denominamos Cálculo diferencial e integral, en la Matemática escolar.

Pues bien, como primer momento importante, en el desarrollo de las ideas del Cálculo, podemos señalar el de la matemática de la Grecia antigua. Fue entonces que se comenzaron a discutir ideas como la de las cantidades infinitamente pequeñas o infinitesimales. En buena medida, la discusión sobre lo infinitesimal se desarrollaba en torno a aceptar o no que ”llegaba un momento” en el que se pudiera afirmar que se tenía una situación distinta a la que se manifiesta en ”condiciones normales”. En el caso del círculo y sus polígonos inscritos, por ejemplo, el asunto era aceptar o no, que, dada su infinita pequeñez, el arco de cada sector circular puede ser considerado, exactamente, o bien, con un error infinitamente pequeño (y, por lo tanto, despreciable) como un segmento rectilíneo.
Si se aceptaba, podría decirse que, si se divide un círculo en una infinidad de sectores circulares (Figura 1), cada uno de ellos definido por un arco infinitamente pequeño (que sería considerado como segmento rectilíneo), entonces el área del círculo sería igual al del triángulo con base igual al perímetro del círculo y altura igual a su radio.

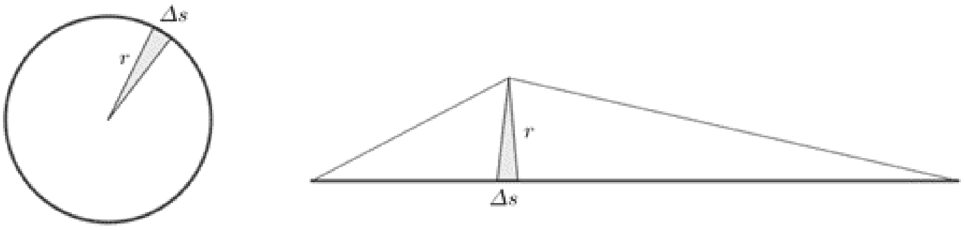



**Figura 1.** Sector

Si no se aceptaba, debía recurrirse a una argumentación lógicamente rigurosa, como lo era el método de exhausión, que surgió como una manera de afrontar los problemas en las que se involucraba al infinito.

Sin embargo, el precio a pagar por eludir al infinito no les resultó nada despreciable; el nuevo método resultaba sumamente engorroso, ya que, para probar la igualdad, se recurría a una doble reducción al absurdo, debiendo establecer un conjunto de desigualdades para cada uno de los casos, y eso ocurría mediante un discurso retórico, sin el simbolismo con el que contamos actualmente.

Por si eso fuera poco, el método no servía para nada si no se conocía el resultado de antemano, es decir, no propiciaba la obtención de nuevos resultados:

Tuvieron que pasar dos milenios para que el asunto de lo infinitamente pequeño fuera aceptado y aprovechado para resolver, de manera general, problemas como el de la recta tangente o el de las cuadraturas y cubaturas.

Sabemos que esto lo consiguieron, de manera independiente y casi simultánea, Leibniz y Newton. En el caso de Leibniz, podemos distinguir dos ideas básicas, una de carácter geométrico y otra de carácter aritmético. Estas ideas y su uso, en la solución de diversos problemas geométricos, quedaron plasmadas en el que puede ser considerado como el primer libro de texto de Cálculo: El análisis de los infinitamente pequeños, del Marqués de L';Hôpital (1696), quien fuera discípulo de Leibniz y los hermanos Bernoulli. En el primer capítulo de este libro, en el que se dan los conceptos básicos que serán utilizados en los capítulos siguientes, la primera definición trata sobre las cantidades constantes y variables, mientras que la segunda es la siguiente:

> *La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuyecontinuamente, es llamada diferencia. Sea AMB, por ejemplo, una línea curva cualquiera que tiene como eje o diámetro a la línea AC y como una de sus ordenadas a la recta PM (Figura 2), y sea pm otra ordenada infinitamente cercana a la primera. Admitido eso, si se trazan MR paralela a AC y las cuerdas AM y am, y luego se describe, con centro en A y radio AM, el pequeño arco de círculo MS, Pp será la diferencia de AP; Rm la de PM; Sm la de AM, y Mm la del arco AM. Análogamente, el pequeño triángulo MAm que tiene como base el arco Mm será la diferencia del segmento AM, y el pequeño espacio MPpm será la diferencia del espacio comprendido por las rectas AP y PM, y por el arco AM.*

Esta definición establece que la diferencial de una cantidad variable es un incremento infinitamente pequeño (infinitesimal) de la misma, y fue el concepto central del Cálculo diferencial leibniziano. En el contexto geométrico (cosa que hace L';Hôpital más adelante), esta idea permite mirar una curva como una poligonal constituida por una infinidad de segmentos infinitamente pequeños. Esta idea geométrica se complementa con una aritmética, que nos

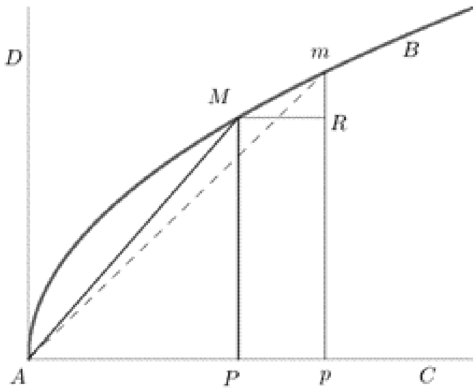



**Figura 2.** Figura 2

permite operar con cantidades finitas e infinitamente pequeñas, y que L' Hôpital da enseguida:

> *Se pide que se puedan tomar indiferentemente una por la otra a dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña, o (lo cual es lo mismo) que una cantidad que no se incremente ni se haga disminuir más que por otra cantidad infinitamente menor que ella, pueda considerarse como que permanece siendo la misma. Se requiere, por ejemplo, que se pueda tomar Ap por AP; pm por PM; el espacio Apm por el espacio APM; el pequeño espacio MPpm por el pequeño rectángulo MPpR; el pequeño sector AMm por el pequeño triángulo AMS; el ángulo pAm por el ángulo PAM; etcétera.*

En el caso de Newton, los conceptos del Cálculo se establecieron en un contexto físico, más que geométrico. Además, Newton se desligó del uso de los infinitamente pequeños, considerando que los diferentes objetos geométricos son generados por el movimiento de objetos de menor dimensión:

> *Considero aquí las cantidades matemáticas no como consistentes de partes muy pequeñas, sino como descritas con un movimiento continuo. Las líneas son descritas y se generan describiendo, no por adición de partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies, por el movimiento de las líneas; los sólidos, por el movimiento de superficies; los ángulos, por la rotación de sus lados; los tiempos, por el flujo continuo, y así las demás cosas. Estas generaciones tienen verdaderamente (su) lugar en la naturaleza de las cosas y se perciben cada día en el movimiento de los cuerpos. Y de este modo los Antiguos, conduciendo rectas móviles a lo largo de rectas inmóviles, enseñaron el origen de los rectángulos.*

Por otro lado, en lugar de variables y razón de cambio, Newton utilizaba fluyentes y fluxiones:

> *Considerando por tanto, que las cantidades que crecen en tiempos iguales, y que creciendo son engendradas, según la mayor o menor velocidad con la cual crecen y son engendradas; buscaba yo un método para determinar las cantidades por las velocidades de los movimientos o de los incrementos con los cuales son generadas; y llamando "fluxiones" a estas velocidades de los movimientos o de los incrementos y llamando "fluyentes" a las cantidades engendradas, acerté a encontrar, en los años 1665 y 1666, un método del cual me he servido en la Cuadratura de las Curvas.*

Ambas versiones del Cálculo fueron utilizadas con mucho provecho en el estudio de las ciencias y en la solución de innumerables problemas, algunos de los cuales habían esperado a ser resueltos por cerca de dos milenios. Esto ocurrió a lo largo de un siglo, luego de lo cual comenzaron a escasear los nuevos resultados, de manera que las críticas al Cálculo por la falta de una fundamentación rigurosa se manifestaron con fuerza creciente. Así, e n el año 1781, en una carta de Lagrange (1736-1813) a D'Alembert, se indicaba:

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm/inicio/proceedings-chfm2022

*Me parece que la mina de las matemáticas es ya muy profunda, y a menos de que alguno descubra nuevas vetas será necesario, en algún momento, abandonarla. La Física y la Química ofrecen ahora una explotación más rica y más fácil (Citado por Pardo, 2003)*

Esta situación sugería la necesidad de descontextualizar el Análisis para que éste adquiriera mayor ”libertad” y pudiera crecer por sí solo, lo que a su vez requería de una profunda revisión de sus fundamentos. En particular, debía deslindarse de ideas tales como lo infinitamente pequeño o las fluxiones.

En este contexto, Lagrange escribe su Teoría de las funciones analíticas, en la que, luego del título mostraba su propósito principal: ”(esta obra) contiene los Principios del Cálculo diferencial, desprovistos de toda consideración de los infinitamente pequeños, de los evanescentes, de los límites y las fluxiones, y se reducen al análisis algebraico de cantidades finitas”.

Luego, en el prólogo, Lagrange hace algunas observaciones sobre las versiones del Cálculo de Leibniz y Newton:

> *Los primeros geómetras que emplearon el cálculo diferencial, Leibniz, los Bernoulli, L'Hôpital, etc. lo hicieron bajo la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas de diferentes órdenes, y la suposición de que se pueden ver como iguales, las cantidades que no difieren entre sí sino por una cantidad infinitamente pequeña respecto de las mismas. Contentos por haber llegado por los procedimientos de ese cálculo a resultados exactos, no se ocuparon de demostrar sus principios.*
> *[...] Newton, para evitar la suposición de los infinitamente pequeños, consideró las cantidades matemáticas como engendradas por el movimiento, y buscó un método para determinar directamente las rapideces variables con las cuales se producen esas cantidades, es aquello que se ha llamado, después de él, el método de las fluxiones o el cálculo fluxional, porque él llamó fluxiones a esas rapideces. (...) Pero, por un lado, introducir el movimiento en un cálculo que no tiene por objeto más que cantidades algebraicas es introducir una idea extraña, que obliga a ver esas cantidades como espacios recorridos por un móvil; por otro, que no se tiene una idea muy clara de qué es la rapidez de un punto a cada instante.*

La segunda edición de la Teoría de las funciones analíticas se publicó en 1813. Tan sólo 10 años después, Cauchy publica su Curso de Análisis, donde establece las bases de la que, un siglo más tarde se convertiría en la única versión del Cálculo, aceptada por el gremio matemático. En la introducción de Jean Dhombres a la versión en español de la UNAM (1994) se indica lo siguiente:

> *En el Análisis algebraico Cauchy no hace ninguna referencia a la física matemática, a pesar de que él mismo la cultivó con mucho talento, y no parece interesarse en el conocimiento del mundo sensible ni en las aplicaciones de la ciencia matemática (...) Si bien no es el primer texto de matemáticas puras, la obra de Cauchy es tal vez la primera, en análisis, que, por sus objetivos, no intenta ninguna justificación ajena a las relaciones intrínsecamente matemáticas. Muy sintomática es también la diferencia con manuales como los de Bezout, sus cursos de matemáticas para el uso de la artillería o para el uso de los guardias de la marina, redactados cincuenta años antes, pero editados en la época de Cauchy y en los cuales muchas páginas evocan las aplicaciones, libros en los cuales el cálculo diferencial mismo no se presenta sino como preliminar a la mecánica y sólo para su utilización práctica (Cauchy, 1994).*

Así pues, a diferencia de Lagrange quien, a pesar de haber hecho una presentación de los conceptos de su teoría de manera descontextualizada, dedicaba, sin embargo, el resto de su obra a las aplicaciones a la geometría y a la mecánica, Cauchy no mostraba ningún interés en aplicación alguna. El Análisis, por fin, había sido ”liberado” de sus aplicaciones.

Tal vez esta descontextualización fue el motivo por el que la obra de Cauchy no haya sido llevada a las aulas, donde, al parecer, pasó prácticamente desapercibida a lo largo del siglo XIX, no así la obra de Lagrange, que fue bien recibida e hizo de complemento a las versiones previas de Leibniz y Newton, como podemos ver en el prólogo del texto de Boucharlat, de mediados del siglo XIX:

> *El método de los infinitamente pequeños, no es sino un medio expedito de encontrar los diferenciales de diversas funciones, él grava sus diferenciales en nuestra memoria mediante figuras geométricas reducidas al último grado de simplicidad, y que hablan más a la imaginación que las ideas abstractas; en fin, este método deviene indispensable en las partes altas de la mecánica y la astronomía, en donde, sin él, la resolución de los problema tendrían una extrema dificultad.*
> *[...] Si el método de los límites complementa al de los infinitamente pequeños, rectificando aquello poco que este último podía tener defectuoso, el método de Lagrange complementa a su vez al de los límites, haciendo depender los coeficientes diferenciales de la pura Álgebra. Se puede entonces considerar entonces a estos tres métodos como formando uno solo (Boucharlat, 1858).*

Entre los matemáticos puros, sin embargo, y a partir de la propuesta de Cauchy, el Análisis comenzó a librarse de toda imprecisión, en particular, de toda alusión a lo infinitamente pequeño. Así, prácticamente un siglo después de la publicación del Análisis de Cauchy, Russell escribía:

> *Lo infinitesimal jugaba antes un importante papel en las matemáticas. Creció gradualmente en importancia hasta que Leibniz inventó el Cálculo Infinitesimal y pareció transformarse en la noción fundamental de la matemática superior. [?] El Cálculo requería continuidad, y la continuidad, se pensaba, requería a su vez de lo infinitamente pequeño. Lo cual no era evidentemente igual a cero, pues sumando un número lo bastante grande de infinitesimales hacían un todo finito. Pero nadie podía descubrir una fracción que fuera distinta de cero y además no finita. Era pues un círculo vicioso. Pero al fin Weierstrass descubrió que no se necesitaba en absoluto lo infinitesimal y que todo podía hacerse sin él. Por consiguiente, no hubo ya necesidad de suponer por más tiempo que tal cosa existía. (Russell, 1915 (?))*

Este es el pensamiento presente entre los autores de textos de Cálculo, cuando menos desde la segunda mitad del siglo XX. Si embargo, en los textos utilizados para la enseñanza de la ingeniería, continúan presentes las concepciones originales del Cálculo, en particular la de la diferencial como un incremento infinitamente pequeño de una cantidad variable, como lo indicara Grattan Guinness:

> *El planteamiento de CauchyWeierstrass, basado en los límites, se ha convertido naturalmente en la forma habitual de enseñanza en los cursos dedicados al cálculo o al análisis (puro). Sin embargo, en los cursos de mecánica, astronomía, física matemática e ingeniería a menudo se emplea la forma euleriana del cálculo diferencial por su flexibilidad intuitiva en la construcción de los modelos diferenciales de los fenómenos físicos en cuestión [...] En el caso de la enseñanza del cálculo, la hegemonía de los límites a provocado una esquizofrenia educacional desafortunada y totalmente innecesaria: el cálculo puro no es otra cosa que epsilonitis de pared a pared e ignora la forma diferencial euleriana del cálculo que los cursos de cálculo aplicado con excelente razón, a menudo utilizan como elemento básico [...] La situación ha cambiado un poco con la introducción de cursos de cálculo en que se usan infinitesimales basados en el análisis no estándar, generalmente en formas muy diluidas. Pero puede emplearse la forma tradicional, con mucho éxito mientras se admita sin reservas la legitimidad de la diferencial (Grattan-Guinness, 1991).*

Más recientemente, el reconocido divulgador de las Matemáticas, Ian Stewart en sus comentarios al conocido libro ¿Qué son las matemáticas? (escrito en 1941 por Courant y Robbins) se ha pronunciado en el sentido de reconocer las ventajas didácticas que resultan de aceptar las cantidades infinitamente pequeñas:

> *Courant y Robbins subrayan que "las diferenciales" como cantidades infinitamente pequeñas están ahora descartadas definitiva y deshonrosamente: una reflexión precisa del punto de vista que se tenía por consenso cuando se escribió ¿Qué son las matemáticas? A pesar del veredicto de Courant y Robbins, siempre ha habido algo intuitivo y llamativo en los argumentos a la antigua con infinitesimales. Están aún sumergidos en nuestro lenguaje en ideas tales como "instantes" de tiempo, velocidades "instantáneas" y el considerar una curva como una serie de líneas rectas infinitamente pequeñas y el área acotada por una curva como suma de una cantidad infinita de áreas de rectángulos infinitesimales. Este tipo de intuición resulta estar justificado, pues se ha descubierto recientemente que el concepto de cantidades infinitamente pequeñas no es deshonroso y no tiene por qué ser descartado (Stewart en Courant y Robbins, 2010).*

De acuerdo con lo anterior, resulta plenamente justificados el diseño, la exploración y la implementación del Cálculo más acorde con los propósitos de las matemáticas en la formación de ingenieros, tanto si se establecen esos propósitos en función del uso de la matemática en la actividad profesional del ingeniero como si se hace sobre el uso en el aprendizaje de las ciencias de la ingeniería.

## Referencias


1. Boucharlat, J. L. (1858), Éléments de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral, Mallet-Bachelier, Paris, Francia.
2. Cauchy, A. L. (1823), Curso de análisis, colección MATHEMA, UNAM, México, 1994. Versión en español basada en los trabajos originales en francés: cours d?analyse (1821) y Résume des leçons sur le calcul ininitésimal (1823). Selección, traducción directa del francés y notas de Carlos Álvarez e introducción de Jean Dhombres.
3. Courant, R., Robins, H. (2010). ¿Qué son las matemáticas? México: Fondo de Cultura Económica
4. Grattan-Guinness, I. (1991). ¿Qué es y qué debería ser el cálculo? En Mathesis 7 (1991), 363-387
5. Lagrange, J. L.; Théorie des fonctions analytiques, seconde édition, Courcier, Paris, Francia, 1813.
6. , Marqués de (1696), Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas, colección MATHEMA, UNAM, México, 1998. Versión en español del original en francés: Analyse des infiniment petits pour l?intelligence des lignes courbes, de 1696.Traducción e introducción de Rodrigo Cambray.
7. Pardo, V.; Lagrange, la elegancia matemática, Nivola, Madrid, España, 2003.
8. Russell, B., (1915 ?) ?Los metafísicos y las matemáticas?, versión en español publicada en el volumen 4 de El mundo de las matemáticas, editorial Grijalbo (pp. 368-381), Barcelona, España, 1969. No se indica la fecha de publicación del artículo, pero de una de las notas al pie de página se menciona que ésta fue añadida en 1917. Considerando que los Principios de la Matemática, del mismo autor, fueron escritos entre 1910 y 1913, se ha propuesto, como posible fecha de escritura del documento, el año 1915.


## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/XPyyo_cub6Y

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**

01A99

**Keywords:**

Historia, Cálculo, Fraccionario.

**Author for correspondence:**

Alberto Mario Gutiérrez Flores

e-mail: alberto.mario80@hotmail.com

# HISTORIA DE LA DERIVADA FRACCIONARIA

Alberto Mario Gutiérrez Flores[1]

Universidad Autónoma de Nuevo León, México

[1]alberto.mario@hotmail.com

## 1. Descripción de la propuesta

En la carrera trabajamos a menudo con derivadas con números enteros, pero... ¿alguna vez te has preguntado qué pasaría si derivamos fraccionalmente? También aprendimos a encontrar primera, segunda o tercera derivada según correspondiera ¿Qué pasaría si quisiéramos obtener la media derivada o tres cuartos de derivada? ¿se podría obtener? Esta pregunta fue hecha por el marqués de L Hopital a Leibniz uno de los padres del cálculo. La respuesta es sí, pero no con los teoremas que conocemos en cálculo diferencial elemental, esta simple pregunta dio origen a un área de las matemáticas más recientes que es el cálculo fraccionario.Paralelamente veremos el desarrollo y origen de la función gamma la cual es fundamental para calcular la derivada fraccionaria e integral fraccionaria y una parte fundamental es que existen diferentes derivadas, no solamente las aprendidas en los cursos de cálculo básico, sino que también se verán otras derivadas como la derivada débil, la derivada en espacios de Sóbolev y desde luego la derivada fraccionaria que tiene una particularidad sobre el resto y es que la derivada de una constante no necesariamente es igual a cero con lo cual se verán dos definiciones de la derivada fraccionaria: la de Riemann-Liouville y la de Caputo.¿Por qué es importante incorporar la historia de las Matemáticas? Si nos concentramos solo en el qué y omitiendo el por qué, las matemáticas se reducen a una serie de hechos que hay que memorizar y procedimientos que hay que seguir, la ausencia de un marco de referencia de significado y el origen de las condiciones que permitieron la construcción al cálculo fraccionario.

La historia del cálculo fraccionario inicia con la familia Bernoulli una de las familias con la mayor desendencia de cientificos en la historia de las ciencias,el abuelo Jacob huyen a Basilea por las contantes persecuciones a los protestantes en donde tenian mejores condiciones favorables a su negocio de especies y es ahí donde el sueño de Jacob era tener una gran desendencia sinb embargo solo tuvo un hijo Nikoalus quien se encargaria de tener una gran dinastia destacando Jakob,Johan y Nikolaus,los hermanos Jakob y Johan quienes entre ellos se llevaban 13 años de diferencia empezaron a estudiar matemáticas en secreto ya que su padre les habia ya asignado una profesión a sus hijos;encargado del negocio familiar y médico sin embargo fue tanto el fracaso de ambos que su padre al descubrir que ambos hermanos estaban estudiando Matemáticas en secreto les ordeno que se dedicaran a lo que fuera con tal de que les dejara dinero y fue así que ambos iniciaron una correspondencia con el gran cofundador Leibniz donde en especial Johan quien habia recibido todas las nociones del cálculo infinitesimal tuvo una gran correspondencia con Leibniz cosa que puso muy celoso a su hermano Jakob y fue este mismo quien le puso el pie a su propio hermano para que no le dieran la plaza de maestro en la universidad de Basilea don de su hermano era miembro,al enterarse Johan indignado partio a Paris para instruir a la academia francesa de todos los conocimientos del cálculo infinitesinal en donde en especial tendrían a un alumno destacado;El marquez d I´Hopital quien al entender los conceptos del cálculo infinitesimal y en espacial las derivadas realizo una carta a Leibniz preguntando ¿Qué pasa si quisieramos encontrar la derivada ½?¿Podría ser posible?la respuesta de Leibniz fue que si era posible pero que no encontraba ninguna interpretación geométrica o analítica de la media derivada incluso el mismo Newton se le realizo la misma preguntaa y llego a la misma conclusión que Leibniz por lo que la derivada fraccionaria en esos momentos quedo de lado al no tener una interpretación física,geométrica o analaítica.

Sin embargo fue Lacroix quien dio la primera aproximación hacia la derivada fraccionaria introduciendo el concepto de la derivada sucesiva utilizando los números factoriales mediante la formula:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$$

donde la misma formula tenia la limitante de ser valida para valores enteros y solo para funciones de potencia pero que fue fundamental para que Leonard Euler resolviera la derivada fraccionaria introducioendo la función gamma a la formula de Lacroix llegando al primer resultado importante al encontrar la derivada fraccionaria $\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1))!} x^{m-n}$ es así como encontramos el primer método para encontrar la derivada fraccionaria pero habia una mejor consigna que era ¿Cómo se podría encontrar la derivada de cualquier función? En 1822, Fourier deduce una generalización de los operadores diferenciales e integrales, pero tampoco aportó ninguna aplicación. La primera aplicación conocida del cálculo fraccionario llegó en 1823 cuando Abel resolvió el problema de la tautócrona. Este problema consiste en encontrar la forma de una curva, de tal forma que un objeto, al deslizarse por ella sin rozamiento, llegue al final de su recorrido en un tiempo independiente del punto de partida. Para ello Abel empleó una derivada de orden $1/2$, y dio una solución tan sencilla y elegante que atrajo la atención de Liouville que en 1832 hizo el primer gran intento de definir la derivada fraccionaria.

En 1847, Riemann escribió un artículo modificando el operador fraccionario dado por Liouville, dando lugar a lo que hoy conocemos como integral fraccionaria de Riemann-Liouville. En la segunda mitad del siglo XIX podemos destacar a Grünwald que, en 1867, propuso una definición natural y novedosa de derivada e integral de orden arbitrario, y en 1868, Letnikov investigó la derivada de Grünwald y publicó los primeros resultados sobre tal operador. A lo largo del siglo XX con el desarrollo del análisis matemático y la teoría de funciones, aparecen nuevas definiciones de operadores fraccionarios, así en 1917, Hermann Weyl definió una integral fraccionaria adecuada para funciones periódicas, y ya en 1967, Caputo dio una nueva definición de derivada fraccionaria que permitía interpretar físicamente las condiciones iniciales de los problemas. Finalmente, en 1974 se publica el primer texto dedicado enteramente a esta disciplina, the *Fractional Calculus*, escrito por el físico y matemático J. Spanier y el químico Keith B. Oldham.

¿Cómo se calcula la derivada fraccionaria mediante el método de Riemann-Liouville?

$$D^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x (x-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds$$

$$u = x - s$$

$$\frac{du}{ds} = -1$$

$$du = -ds$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad n = 1$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-s)^{1-\frac{1}{2}-1}(C)ds$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-s)^{-\frac{1}{2}}(C)\,ds$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}(-1)\int_0^x (u)^{-\frac{1}{2}}(C)\,du$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}(-C)\int_0^x (u)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}(-C)\int_0^x (u)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}(-C)\left[2u^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}(-C)\left[2(x-s)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}(-C)\left[2(x-x)^{\frac{1}{2}} - 2(x-0)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}(-C)\left[-2(x-0)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}(-C)\left[-2x^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dx}2Cx^{\frac{1}{2}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}Cx^{-\frac{1}{2}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{Cx^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{Cx^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{C}{\sqrt{\pi}x^{\frac{1}{2}}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{C}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}[C] = \frac{C}{\sqrt{\pi x}}$$

Un aspecto importante es saber que dos de las primeras definiciones que fue :

- Riemann-Liouville
- Caputo

¿Cuál es la diferencia entre estas dos definiciones?la diferencia es que en la definición de Riemann-Liouville la derivada fraccionaria de una constante es cero y en la definición de Caputo la derivada fraccionaria de una contante es cero y con esto se abre la pregunta ¿Cuántas tipos de derivadas existen?podriamos pensar que solo las derivadas que aprendimos en nuestros cursos de cálculo diferencial sin embargo tenemos otras derivadas las cuales son:

1. Derivada debíl
2. Derivada de Lie
3. Derivada Parcial
4. Derivada espacios Sóbolev
5. Derivada Fraccionaria

Cada una de estas aplicadas a diferentes áreas pero con algo común;la derivada de una constante es cero pero,en la derivada fraccionaria no es así y con esto se vio en la necesidad de realizar una definición que abarcará todas las definiciones de las derivadas.

## 2. Resultados

han mostrado que, tanto la interpretación, como las aplicaciones de la derivada fraccionaria han mostrado un interés en particular sobre ¿Cuántos tipos de derivadas existen? Y también sobre el interés de obtener la derivada fraccionaria de otro tipo de funciones. La enseñanza del concepto del cálculo fraccionario desde el origen histórico, ha mostrado que se aprende desde el por qué. Si nos concentramos solo en el qué, omitiendo el por qué, las matemáticas se reducen a una serie de hechos que hay que memorizar y procedimientos que hay que seguir.

## Referencias

1. Guia-Calderon, M. et al.El cálculo diferencial e integral fraccionario y sus aplicaciones. Acta univ [online]. 2015, vol.25, n.2, pp.20-27. ISSN 2007-9621. https://doi.org/10.15174/au.2015.688.
2. Lockhart, P. (9 de Octubre de 2021). El lamento de un matemático. $https://jorgefernandezherce.es/textos/lamento_{d}e_{u}n_{m}atematico.pdf$
3. Funciones especiales. (9 de octubre de 2021). La función gamma.$http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/especial/gamma/gamma.html$
4. K. B. Oldham y J. Spanier, The Fractional Calculus. New York and London:Academic Press, 1974.
5. J. M. Sánchez Muñoz, «Historias de Matemáticas, Génesis y desarrollo del Cálculo.
6. , Pensamiento Matemático, 2011, no 1, p. 4.
7. J. L. Rodriguez, Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y aplicaciones. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela, 2018.
8. V. G. Buesaquillo Gomez, Métodos de Cálculo fraccional en la descripción de sistemas físicos, San Juan de Pasto, Colombia: Universidad de Nariño, 2013.

## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/uQOpUw_kmxQ

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

# FUNDAPROMAT: MATEMÁTICAS DIVERTIDAS PARA TODOS

Jeanette Shakalli [1]

Fundación Panameña para la Promoción de las Matemáticas - FUNDAPROMAT

[1]info@fundapromat.org

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**
01A99

**Keywords:**
Divulgación, Matemática.

**Author for correspondence:**
Jeanette Shakalli
e-mail: info@fundapromat.org

## 1. Descripción de la propuesta

La Fundación Panameña para la Promoción de las Matemáticas (FUNDAPROMAT) es una Fundación privada sin fines de lucro que nació el 6 de diciembre de 2019 y busca cambiar la percepción del mundo para que todos y cada uno de nosotros podamos experimentar las matemáticas como accesibles, relevantes e inherentemente divertidas.

Mediante actividades de popularización de las matemáticas como Encuentros Virtuales con Matemáticos Sobresalientes, Jolgorios Matemáticos, Clases Virtuales de Origami, Webinarios de Matemáticas Recreativas, Carnavales de Matemáticas, MathsJams, entre otros, buscamos inspirar a nuestra juventud a que se entusiasme por estudiar matemáticas o seguir una carrera científica.

A través de presentaciones abiertas a todo público dictadas por prominentes matemáticos nacionales e internacionales, también buscamos convencer a niños, jóvenes y adultos de todas las edades de que las matemáticas no sólo son divertidas sino que también tienen muchas aplicaciones muy interesantes.

A la fecha FUNDAPROMAT ha realizado más de 500 eventos virtuales con más de 50,000 participantes, incluyendo tanto panameños como extranjeros de todas partes del mundo. Personas de países tan diversos como Chile, Colombia, Venezuela, Costa Rica, Ecuador, Estados Unidos, España, Argentina, El Salvador, Perú, Brasil, Guatemala, México y muchos más, participan en nuestras actividades. Nuestros eventos virtuales son gratis y son abiertos a todo público, por lo que niños, jóvenes y adultos de todas las edades están cordialmente bienvenidos a participar.

Una vez al mes realizamos Encuentros Virtuales con Matemáticos Sobresalientes, en donde una mujer matemática comparte anécdotas de su vida personal y su trayectoria profesional como mujer matemática y luego presenta sobre algún tema interesante de matemáticas como "El Juego de SET," que es un juego adictivo para toda la familia, y "Las Matemáticas de los Secretos," que fue sobre las matemáticas ocultas cuando enviamos mensajes codificados. El propósito de estos eventos virtuales es inspirar a las niñas y a las jóvenes al ver ejemplos de la vida real de mujeres matemáticas que son exitosas en su carrera.

También organizamos Clases Virtuales de Origami todos los viernes, en donde artistas de origami enseñan cómo doblar modelos de origami mientras conectan el arte de doblar papel con las matemáticas. Algunos diseños de origami que hemos aprendido a doblar son delfines, flores, mariposas, estrellas, pingüinos, copos de nieve, elefantes y muchos más. Estas clases virtuales son aptas para mayores de 8 años de edad.

Cada semana organizamos Webinarios de Matemáticas Recreativas sobre temas fascinantes como "Magia y Matemáticas," "Matemáticas y Juegos de Ingenio," "Música Latina y Matemáticas," "Las Matemáticas de las Sombras," y muchos más. La idea detrás de estos eventos virtuales es mostrarle al público en general de que las matemáticas están en todas partes y que son mucho más de lo que nos enseñan en un salón de clases.

Todos los sábados también realizamos Jolgorios Matemáticos, que son eventos virtuales interactivos para toda la familia. Los participantes se separan en grupos dependiendo si son niños o adultos y luego exploramos una actividad divertida de matemáticas en un ambiente de colaboración y mucha diversión. Niños desde 4 añitos de edad hasta adultos mayores participan en estos eventos virtuales semanales. Algunas de las actividades que hemos explorado en nuestros Jolgorios Matemáticas son "Tangram," "El Juego del Chocolate," "Grillos Saltarines," "Regando Huertas," "Tortugas," "Campamento," y muchos más. Las diapositivas de todas las actividades de nuestros Jolgorios Matemáticos están disponibles para descargar de forma gratuita en el enlace https://tinyurl.com/actividades-jolgorios. Solamente recuerde hacer su propia copia de cada actividad para poder manipularla.

Los Carnavales de Matemáticas son eventos presenciales para toda la familia que se realizan una vez al mes en parques, museos o centros comerciales. Grandes y pequeños disfrutan aprendiendo matemáticas a través de juegos, acertijos, rompecabezas, magia y origami con mujeres matemáticas panameñas. Estos eventos presenciales tienen el objetivo de inspirar a la juventud panameña, en particular a las niñas y a las jóvenes, a que se entusiasmen por estudiar matemáticas o seguir una carrera científica.

Una vez al mes también organizamos MathsJams, que son eventos presenciales sólo para adultos en donde resolvemos retos y desafíos intelectuales con el fin de fortalecer nuestras habilidades mentales, mientras compartimos un rato agradable con otros aficionados a las matemáticas. Los MathsJams se llevan a cabo el penúltimo martes de cada mes en la Rana Dorada de Condado del Rey en la Ciudad de Panamá.

Nosotros organizamos varios eventos, tanto virtuales como presenciales, por semana. Para participar, los interesados solamente se deben registrar en el link de inscripción del evento virtual que les interese. El afiche con el link de inscripción es publicado una semana antes del evento virtual en nuestras redes sociales: Instagram, Facebook y Twitter, todos @fundapromat. En el caso de los eventos presenciales, no requieren inscripción previa. También puede ingresar a nuestra base de datos en nuestro sitio web www.fundapromat.org para recibir nuestras notificaciones por correo y visitar el Calendario de Eventos en donde podrá encontrar información de nuestros próximos eventos.

En el caso de nuestros eventos virtuales, nosotros utilizamos la plataforma virtual Zoom. El correo con el link de acceso es enviado el día antes del evento después de las 4 pm (hora de Panamá) a todos aquellos que se hayan inscrito. Siempre recomendamos revisar su bandeja de spam y su bandeja de promociones, por si acaso. Para consultas adicionales, también nos pueden contactar al correo info@fundapromat.org.

Una Fundación que está dedicada a promover el estudio de las matemáticas al público en general es necesaria para cambiar la manera en que las personas perciben las matemáticas para lograr fortalecer la educación matemática en Panamá. Esto es fundamentalmente importante ya que Panamá fracasó las evaluaciones internacionales que miden el desempeño de los estudiantes en matemáticas. En el año 2019, Panamá ocupó el lugar 76 de los 79 países evaluados en la sección de matemáticas del Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos (PISA) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). Además, Panamá solamente cuenta con 8 Doctores en Matemáticas y el país aún no cuenta con un programa de postgrado en matemáticas avanzada.

Para inspirar a los niños a que les gusten las matemáticas, primero debemos averiguar qué es lo que más les llama la atención. Por ejemplo, si al niño le gusta el deporte, jugar videojuegos, hacer origami, explorar la naturaleza, hacer rompecabezas… todo esto tiene matemáticas. Lo único que debemos hacer es conectar ese tema que tanto le gusta al niño con las matemáticas y para eso está FUNDAPROMAT.

Las matemáticas nos rodean. Podemos encontrar las matemáticas en la naturaleza, en el deporte, en la música, en la danza, en el arte, en la moda y hasta en los juegos. Por ejemplo, algunos magos utilizan conceptos básicos de las matemáticas en sus trucos de magia con barajas para sorprender a la audiencia. Las películas usan las matemáticas para modelar el mundo real en el movimiento de los personajes animados, como Yoda en Star Wars, y en la simulación de objetos físicos, como la nieve en Frozen. FUNDAPROMAT nos enseña a apreciar que las matemáticas están en todas partes.

Las matemáticas son necesarias en prácticamente todas las profesiones. Aparte de las carreras en ciencia, tecnología e ingeniería, los carpinteros y los albañiles usan mucha geometría elemental. Las costureras trabajan mucho con mediciones y proporciones. Las recetas que utilizan los chefs contienen cantidades específicas de cada uno de los ingredientes. Los mecánicos usan la aritmética para medir y comparar la densidad de los aceites y la presión en los frenos.

Más allá de todo esto, las matemáticas entrenan al cerebro en el pensamiento lógico, lo que permite analizar situaciones cotidianas con razonamiento crítico, detectando cuáles variables intervienen y cuáles son sus efectos, para así poder tomar mejores decisiones.

## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/PNGM4CPJsGc

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**
01A99

**Keywords:**
Numeración, Maya, Historia.

**Author for correspondence:**
Marlón David Jiménez Valenzuela
e-mail: mdavidjv@gmail.com

COLOQUIO de
HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA
PUBLICACIONES

# SISTEMA DE NUMERACIÓN MAYA: ASPECTOS HISTÓRICOS Y DIDÁCTICOS

Marlón David Jiménez Valenzuela [1]

[1] mdavidjv1@gmail.com

## 1. Descripción de la propuesta

En el área cultural que hoy se conoce como Mesoamérica surgió y se desarrolló una de las civilizaciones más importantes de la América precolombina, la civilización maya, la cual destacó en numerosos aspectos socioculturales como la arquitectura, el arte, astronomía, medicina y las matemáticas, entre otras. Cabe resaltar que los mayas llegaron a tener un sistema de escritura plenamente desarrollado y que su sistema de numeración vigesimal les facilitó el computo del tiempo, el cálculo y el desarrollo de las demás ciencias.

Gran parte del conocimiento de esta importante civilización fue plasmado en estelas, altares y sobre todo en códices, los cuales, a raíz de la conquista de América fueron destruidos casi en su totalidad. De hecho, solo cuatro códices mayas son los que han llegado a nuestros días: El Códice Dresde, el Códice de Madrid, el Códice de Paris y el Códice Grolier. De estos, cobra gran relevancia el Códice Dresde por ser el más elaborado y contener detalles del calendario maya y su sistema de numeración.

Con el paso del tiempo se ha descubierto que el sistema de numeración maya posee una serie de características con un alto grado de simplicidad, pero de gran riqueza cognitiva. Durante los últimos años, diversas instituciones y entidades de Guatemala han comenzado a reconocer el valor de este legado científico, comprendiendo la riqueza de los procesos mentales que son desarrollados o fomentados cuando se aplica. Todo ello ha dado paso a diferentes propuestas metodológicas y didácticas que faciliten el proceso enseñanza-aprendizaje de lo que ahora es un contenido del área de matemáticas del Curriculum Nacional Base del nivel primario de Guatemala.

Una propuesta didáctica para la enseñanza de la numeración maya, elaborada por el profesor Marlon Jiménez, consiste en el uso de material manipulativo elaborado con paletas de madera, goma eva de colores relacionados con la cosmovisión maya (negro, rojo, amarillo y blanco) así como un tablero de posiciones elaborado en cartulina en el que los estudiantes pueden representar cantidades desde cero hasta 7999, o más, en la medida que se agrande el tablero.

Es de vital importancia conocer los aspectos más relevantes de la historia de la civilización maya y su sistema de numeración, pero es igual o más importante encontrar los medios idoneos para transmitir estos conocimientos a las nuevas generaciones.

## Referencias


1. Caciá, D. (2002). Matemática y pensamiento lógico. Ministerio de Educación de Guatemala.
2. Caciá, D. & Reyes, R. (2004). El sistema de numeración maya y sus operaciones aritméticas. Editorial Piedra Santa.
3. Esparza, D. (1976). Computo Azteca. Editorial Diana.
4. Ministerio de Educación. (2010). Curriculum Nacional Base, Nivel primario. Guatemala.
5. Morales, L. (2002). Metodología para la enseñanza de las matemáticas. Editorial Nojib.sa.


## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/WWsb83IIB2o

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

# EL CERO, UN NÚMERO DIFERENTE A LOS DEMÁS

Paola Donoso Riquelme [1]

Universidad de Magallanes - Chile.

[1] paola.donoso@umag.cl

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**

01A99

**Keywords:**

Historia, Números, Sistema de numeración.

**Author for correspondence:**

Paola Donoso Riquelme

e-mail: mdavidjv@gmail.com

## 1. Descripción de la propuesta

El origen del cero, permitió completar el sistema posicional, y con ello poder representar los números y operar con ellos. Sin el cero, esto no hubiese sido posible. Estudios antropológicos han puesto de manifiesto que el cero surgió de forma independiente en lugares tan alejados como Mesopotamia y Mesoamérica. Si bien, es posible, que las motivaciones que dan lugar a dicha aparición, en ambas civilizaciones, fuesen diferentes. En el primer caso sería una motivación centrada en la contabilidad, en el segundo caso se trataría de motivaciones de tipo astronómico y religioso. El cero, en Mesopotamia, nació entre los sumerios, simplemente para resolver dificultades de representación de los números, y luego para realizar cálculos. Más tarde se apropiaron de él los griegos de Alejandro Magno, de paso por Babilonia. Los griegos lo llevaron a la India. De allí lo tomaron los árabes, que se lo transmitieron a los mercaderes italianos, y éstos lo difundieron en toda Europa. Para los siglos XV y XVI, el cero se extendió tras encontrar mucha resistencia. Sunya es el nombre de la marca del vacío en lengua india; y la primera representación del cero fue un pequeño círculo, Sunya, el vacío. Cuando se traduce al árabe se convierte en sifr, y posteriormente en latín será, zephirum, que produjo zephiro, cero.

Las primeras civilizaciones necesitaron un tiempo largo para concebir el cero como número, una razón era filosófica: ¿cómo puede cero ser un número cuando un número es una cantidad de cosas? ¿Es nada una cantidad?

Por lo que a la "nada"se refiere, participa de la categoría de la existencia. La creación del cero número realiza una síntesis de ambas categorías y lleva a cabo una radical transformación del estatuto del número. "No hay nada"se convierte, con él, en "hay nada". Paso de la lógica a la aritmética, del cero lógico al cero matemático que es un "valor". El trayecto que permitió pasar de "no hay.ª "hay ceroçonstituye una etapa fundamental en la historia del pensamiento. ¿Cuánto? ¡Cero! En América, también existen registros de la presencia del cero, específicamente en la cultura de los Mayas. Es probable que la invención del cero pudiese deberse a los Olmecas, una civilización anterior a los Mayas ubicada en los actuales estados de Tabasco y Veracruz. Desgraciadamente su descubrimiento no pasó a otras culturas más allá de los Mayas. Los Mayas vivieron en Mesoamérica, ocupando el área que hoy es el Sur de México, Guatemala y el norte de Belice. Fueron una civilización que surgió entre el 250 y el 900 aproximadamente. Los Mayas en su obsesión por contar y contabilizar el tiempo descubrieron el cero. Contaban con varios calendarios distintos. El calendario cósmico, un calendario civil con 360 días y 5 fechas «fantasmas» y un tercer calendario con un año de 260 días. El cuarto era el ciclo diabólico de los "Señores de la Noche". Para otras cosas se usaba un calendario lunar, otro con el ciclo sinódico de Venus y hasta uno de Mercurio. El problema surgía con los cruces de estos calendarios (cinco años del calendario de Venus eran 8 del civil, y 405 lunaciones eran 46 años del calendario Tzolkin) pues existía el peligro de que en cualquiera de esas intersecciones de calendarios se acabara el tiempo, por lo que había que exorcizarlas. Aquí es donde aparece el cero, que es el fin y el comienzo de un nuevo periodo de tiempo. Los antecedentes históricos del origen del cero, revelan que es un número que se comporta de manera diferente a los demás, ya que, posee especificidades únicas, y son estas lo que provoca serios conflictos en la comprensión de la matemática.

## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/UwPUTrlW5d0

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**
01A99

**Keywords:**
Historia, Formación de profesores, Matemática.

**Author for correspondence:**
Edgar Alberto Guacaneme Suarez
e-mail:
guacaneme@pedagogia.edu.co

COLOQUIO de
HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA
PUBLICACIONES

# APORTES DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS A LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Edgar Alberto Guacaneme Suarez [1]

Universidad Pedagógica Nacional - Colombia.

[1] guacaneme@pedagogia.edu.co

## 1. Descripción de la propuesta

Los resultados de la tesis doctoral "Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas" ofrecen la posibilidad de reconocer a la Historia de las Matemáticas como ámbito excepcional de formación a favor de la formación de profesores de matemáticas. El desarrollo de esta implicó, en una de sus fases iniciales, la construcción de un sistema de categorías en las que se destacan las siete respuestas, organizadas en visiones y artefactos, a la pregunta: ¿Para qué la Historia de las Matemáticas en la formación del profesor? En una fase posterior, se realizó un análisis de potenciales contribuciones que el estudio de la historia sobre un hito de la evolución de la razón y la proporción hace a la formación el profesor de matemáticas.

## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/qOO2vYjVGFM

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**
01A99

**Keywords:**
Geometría, Perspectiva, Humano.

**Author for correspondence:**
Cristian Reyes Monsalve
e-mail: creyesm1992@gmail.com

COLOQUIO de
HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA
PUBLICACIONES

# LA GEOMETRÍA DE LA PERSPECTIVA Y LA INDIVIDUALIDAD HUMANA

Cristian Reyes Monsalve [1]

Universidad de Concepción -Chile.

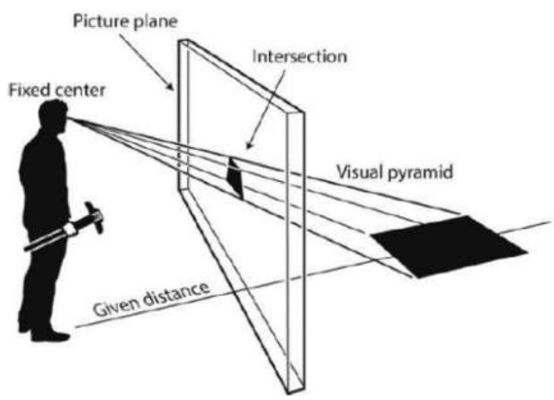
[1] creyesm1992@gmail.com

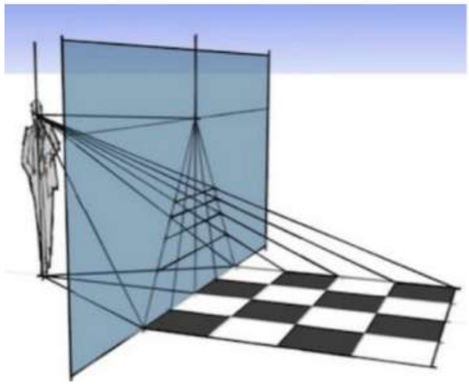
## 1. Descripción de la propuesta

En este documento describiré de manera breve algunas relaciones entre el desarrollo de la geometría de la perspectiva y el contexto cultural de la época, haciendo hincapié en los aspectos pictóricos y psicológicos del periodo.

La perspectiva geométrica, también llamada *construzione legittima*, fue un conjunto de herramientas geométrico-pictóricas desarrolladas por pintores-matemáticos en el quatroccento italiano. La concepción de la pintura como la contraparte tangible de un plano que corta la pirámide visual (con vértice en el ojo y base en el objeto observado), fue un paso fundamental para concebir la idea de los puntos de fuga y la línea al horizonte.

Las pinturas del quatroccento nos entregan un fascinante compendio del uso de esta técnica, que primeramente plasmó Masaccio en su Trinidad (c. 1428), para luego ser adoptada por la práctica totalidad de pintores renacentistas.





El primer tratado dedicado exclusivamente a la perspectiva geométrica fue escrito por Piero della Francesca, quien en la década del 1470 mostraba cómo construir poliedros, bóvedas, edificios y capiteles, todo mediante la técnica geométrica de la perspectiva. Podríamos considerar este trabajo como una culminación de las ideas abordadas por Leon Battista Alberti, en 1436, en relación a esta técnica, pues este último considero la herramienta de una manera más informal, con miras a la práctica pictórica más que a la geometría subyacente.

Lo interesante de los finales del quatroccento es la (aparentemente) sorprendente coincidencia de tres fenómenos simultáneos: (1) La primera vez que un pintor se autorretrata de manera sistemática (Alberto Durero); (2) El surgimiento de los primeros paisajes en occidente; (3) El tratado de Piero della Francesca titulado *De Prospectiva Pingendi*. Lo que a priori son tres sucesos absolutamente desconectados en realidad son tres manifestaciones de un proceso subyacente, que el poeta y filósofo Jean Gebser denomina mutación de la conciencia. La sutil conexión entre estos fenómenos viene expresada por este pensador en el siguiente fragmento:

*"La objetivación del espacio forma parte de un yo consciente de sí mismo, capaz de confrontarse con ese espacio y, desprendiéndolo del alma, capaz también de representarlo"* (Gebser, 2011)

Vemos en esta profundísima frase la objetivación del espacio (geometrización a través de la perspectiva), ligada al yo consciente de sí mismo (reflejado en los autorretratos firmados y sostenidos en el tiempo), capaz de confrontarse con ese espacio ya desprendido del alma, para representarlo (reflejado en los paisajes). Analizamos cómo es que esos tres aspectos llevaron al ser humano a una confrontación con lo "externo a él", con lo cual profundizó en su separación con el mundo. Dicho alejamiento le otorgó, simultáneamente, un sentimiento de individualidad y de libertad. Esta libertad, herencia de una "confrontación" o "separación" del mundo, está fielmente reflejada en el Discurso sobre la dignidad del hombre (1486), escrito por Giovanni Pico della Mirandola. El creador del manifiesto del renacimiento reformuló el Génesis bíblico para dotar al ser humano de una dignidad que el cristianismo no le entregaba al Adán caído.

Por otro lado, a inicios del siglo XVI, mientras da Vinci daba forma a lo que eventualmente denominaríamos su Tratado de la pintura (c. 1510), y mientras Durero redactaba sus Cuatro libros sobre las medidas (1525), tenemos diversas manifestaciones de la recientemente asumida libertad humana, como la publicación de las 95 tesis de Martin Lutero (1517), o la distribución por parte e Copérnico del Commentariolus (1514). En el primer caso tenemos una profundización de la individualidad en términos de la voluntad humana de rebelarse frente a asuntos que considera injustos y que constriñen su libertad a la hora de gestionar, en este caso, la culpa. Por esa razón Lutero condenaba en sus tesis la venta de indulgencias por parte de las esferas eclesiásticas. En el segundo caso vemos la primera gran grieta a la cosmología medieval dominante de corte aristotélico-ptolemaico-cristiano, en el cual la existencia es concebida en un mundo cerrado, esférico, cualitativo y altamente jerarquizado. Con su Commentariolus tenemos que Copérnico, como buen reflejo de una época que se estaba abriendo a "lo externo", abre el espacio a nivel cósmico (y no solo a nivel paisajístico), en un escrito que ya contenía las ideas que presentaría posteriormente en su famosísimo tratado heliocéntrico: De Revolutionibus Orbium Coelestium (1543).

Retrocediendo casi un siglo a partir de este increíble periodo tenemos manifestaciones incipientes de este fenómeno geométrico-pictórico-psicológico. Con todo lo ya discutido no debería sorprendernos el hecho de que Jan Van Eyck hiciera un autorretrato no firmado en 1433; que Jean Fouquet fuera el primero en realizar un autorretrato firmado en 1450; y que entre ambas fechas Leon Battista Alberti hiciera el primer escrito en el que alguien abordara, aunque sea de manera informal, la perspectiva geométrica (notemos que su libro comienza diciendo léanme no como un matemático, sino sólo como un pintor). Estas tres instancias son manifestaciones de una concepción no-completamente-consciente de la propia individualidad (notemos que Fouquet sólo hizo 1 autorretrato firmado, y era una miniatura), reflejada en los primeros intentos de Alberti de geometrizar el espacio a través de la perspectiva.

Y si retrocedemos todavía más, al primer tercio del siglo XIV, tenemos las pinturas de Giotto y las declaraciones de Petrarca, que son un fiel reflejo del despertar/descubrimiento/invención del espacio circundante. Los espacios cerrados, tímidos, con cielos planos e ingenuos del pintor Giotto se corresponden con la inclinación del poeta Petrarca a recogerse temeroso sobre sí mismo frente a la inmensidad del espacio que vislumbró en la cima del Mont Ventoux. Fueron estos dos personajes quienes, aparte de encarnar el espíritu de los orígenes del renacimiento y el humanismo, se abrieron tímidamente al espacio circundante, que un siglo después vendría a ser comentado por Alberti, y 50 años después sería sistematizado geométricamente por Piero. Así vemos que, entre los años 1300 y 1500, el espacio exterior fue despertando en el contexto europeo, para eventualmente concebir la primera conceptualización geométrica sistemática del espacio externo a fines del siglo XV.

Desde este ángulo, la perspectiva geométrica juega el papel de ser una de las tantas manifestaciones de la conciencia humana, que entraba en un periodo de conceptualización y objetivación del espacio externo, cuya contraparte es una profundización en el espacio interior subjetivo, con la correspondiente toma de conciencia de la libertad que esa separación interiorexterior otorga. Este fascinante enfoque fue descrito por un poeta y filósofo, sensible a las múltiples manifestaciones de la época, y contrasta enormemente con el empobrecido panorama que entregan las historias generales de la matemática del periodo, focalizadas en lo meramente geométrico y encapsuladas en un internalismo patológico. Las pocas páginas que dedican Boyer y Kline en sus historias globales de la matemática sobre este fascinante episodio nos muestran cómo una visión meramente internalista de la matemática empobrece nuestra visión del amplio contexto que rodea los descubrimientos matemáticos, y cómo estos permean y son permeados por la cultura circundante.

## Referencias


1. Gebser, J. (1949, 2011). Origen y Presente. Ediciones Atalanta.
2. Alberti, L. B. (1436, 2011). On Painting. Cambridge University Press.
3. Da Vinci, L. (c. 1510, 2005). Treatise on Painting. Dover Books.
4. Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). A History of Mathematics. John Wiley & Sons.
5. Kline, M. (1990). Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (Vol. 1). Oxford University Press.


## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/imiK8l9P1Vc

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**
01A99

**Keywords:**
Teoremas de Godel, Realismo matemático.

**Author for correspondence:**
Miguel León Untiveros
e-mail: mleonun@unmsm.edu.pe

# EL REALISMO MATEMÁTICO

Miguel León Untiveros [1]

Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

[1] mleonun@unmsm.edu.pe

## 1. Descripción de la propuesta

En esta charla daré cuenta de algunas propuestas a favor del realismo y sostendré que algunas propuestos no realistas en todo caso tienes los mismos limites que el realismo. Por tanto, cualquier postura (realismo y antirealismo) no son concluyentes como podría pensarse *prima facie*. Si bien algunas posturas realistas se sustentan en los teoremas de imposibilidad de Kurt Gödel, empero estos teoremas no tienen en valor deductivo externo, es decir, fuera de los alcances propiamente lógicos, sino que estos teoremas son parte de la discusión filosófica. Por nuestra parte, el realismo matemático que defendemos tiene un carácter abductivo, es decir, que dada la evidencia formal actual, nuestra conclusión no es concluyente, y dicimos que los objetos matemáticos existen *pro tem*, salvo evidencia posterior.

## Referencias


1. Benacerraf, P., & Putnam, H. (Eds.). (1983). Philosophy of Mathematics. Selected Readings (second ed.). Cambridge et al.: Cambridge University Press.
2. Blanchette, P. (9 de August de 2018). The Frege-Hilbert Controversy. Obtenido de Stanford Encyclopedia of Philosophy: https://plato.stanford.edu/entries/frege-hilbert/
3. Bourbaki, N. (1999 [1984]). Elements of the History of Mathematics. (J. Meldrum, Trans.) Springer et al.: Springer.
4. Brown, J. R. (2012). Platonism, Naturalism, and Mathematical Knowledge. New York & London: Routledge.
5. Cellucci, C. (Ed.). (1967). La filosofia della matematica. Bari: Laterza.
6. Cellucci, C. (2002). Filosofia e matematica. Roma: Laterza.
7. Corry, L. (2015). A Brief History of Numbers. Oxford: Oxford University Press.
8. Costantini, F. (2016). Pensare l'infinito. Filosofia e matematica dell'infinito in Bernard Bolzano e Georg Cantor. Milano: Mimesis.
9. Couturat, L. (1960). La filosofía de las matemáticas en Kant. (M. Bueno, Trad.) México: UNAM.
10. Dauben, J. W. (1979). Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the
11. Infinite. New Jersey: Princeton University Press. de Lorenzo, J. (1979). Lógica y matemática en K. Gödel. Estudios Filosóficos, XXVIII(79), 391-453.
12. de Lorenzo, J. (1980). El método axiomático y sus creencias. Madrid: Tecnos.
13. de Lorenzo, J. (1998). La matemática: de sus fundamentos y crisis. Madrid: Tecnos.
14. Ewald, W. (Ed.). (1996). From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics. Volume I. (Vol. I). Oxford et al.: Clarendon Press.
15. Ewald, W. (Ed.). (1996). From Kant to Hilbert: A Source Book in the
16. Foundations of Mathematics (Vol. II). Oxford: Oxford University Press.
17. J. (1999). Mathematicas and Platonismo(s). La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas, 2, 446-473.
18. Ferreirós, J. (2007). Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics (Second revised ed.). Basel - Boston - Berlin: Birkhäuser.
19. Friend, M. (2007). Introducing Philosophy of Mathematics. Stocksfield: Acumen.
20. George, A., & Velleman, D. J. (2002). Philosophies of Mathematics. Massachusetts and Oxford: Blackwell Publishers.
21. Gödel, K. (1986 (1931)). On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related Systems I. In S. Feferman (Ed.), kurt Gödel. Collected works (pp. 145-195). New York: Oxford University Press.
22. Gödel, K. (1986 [1930]). The completeness of the axioms of the functional calculus of logic. In K. Gödel, & S. Feferman (Ed.), Kurt Gödel. Collected Works (Vols. I. Publications 1929-1936, pp. 103-123). Oxford: Oxford University Press.
23. Gödel, K. (1990 [1944]). Russell's mathematical logic . In K. Gödel, S. Feferman, J. W. Dawson Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay, & J. van Heijenoort (Eds.), Kurt Gödel. Collected Works (Vols. II. Publications 1938-1974., pp. 119-141). New York and Oxford: Oxford University Press . Feferman Goldstern, G., & Judah, H. (1998). The Incompleteness Phenomenon. A New Course in Mathematical Logic. Massachusetts: A K Peters.
24. Feferman Grattan-Guinness, I. (Ed.). (1994). Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences (Vol. 1 & 2). London and New York: Routledge.
25. Hendricks, V. F., & Leitgeb, H. (Edits.). (2008). Philosophy of Mathematics. 5 questions. Copenhagen: Automatic Press.
26. Hendricks, V. F., Pedersen, S. A., & Jørgensen, K. F. (Eds.). (2000). Proof Theory. History and Philosophical Significance. Dordrecht, Boston & London: Kluwer Academic Publishers.
27. Herce Fernández, R. (2014). De la física a la mente. El proyecto filosófico de Roger Penrose. Madrid: Biblioteca Nueva.
28. Herce, R. (2016). Penrose on What Scientists Know. Foundations of Science, 21(4). doi:10.1007/s10699-015-9432-0
29. Hilbert, D. (1967 [1925]). On the infinite. In J. van Heijenoort (Ed.), From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1979 - 1931 (J. van Heijenoort, Trans., pp. 367-392). Cambridge: University Harvard Press.
30. Hilbert, D. (1993). Fundamentos de las matemáticas. (L. F. Segura, Trad.) México: facultad de Ciencias de la UNAM.

31. Hilbert, D. (1996 (1923)). The logical foundations of mathematics. In W. Ewald (Ed.), From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics (W. Ewald, Trans., Vol. II, pp. 1134-1148). Oxford: Clarendon Press.
32. Hilbert, D. (1996 [1918]). Axiomatic thought. In W. B. Ewald (Ed.), From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics (Vol. II, pp. 1105–15). Oxford: Oxford University Press.
33. Hilbert, D. (1996 [1922]). The new grounding of mathematics. In W. Ewald (Ed.), From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics (Vol. II, pp. 1115–34). Oxford: Oxford University Press.
34. Hilbert, D. (1996 [1930]). The Knowledge of Nature. In W. Ewald (Ed.), From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics (Vol. II, pp. 1157-65). Oxford: Oxford University Press.
35. Hilbert, D. (2014). Los fundamentos de las Matemáticas. Analítica, 8, 85-104.
36. Irvine, A. (Ed.). (2009). Philosophy of Mathematics. Amsterdam et al.: North Holland - Elsevier.
37. Ladrière, J. (1957). Les limitations internes des formalismes. Étude sur la signification du théorème de Gödel et théorèmes apparentés dan la théorie des fondaments des mathématiques. Louvain & Paris: E. Nauwertlaerts & Gauthiers-Villars.
38. Lakatos, I. (Ed.). (1967). Problems in the Philosophy of Mathematics. Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London, 1965 (Vol. 1). Amsterdam: North-Holland.
39. Lakatos, I. (2015 (1977)). Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery. (J. Worrall, & E. Zahar, Edits.) Cambridge: Cambridge University Press.
40. Leng, M. (2010). Mathematics and reality. Oxford et al.: Oxford University Press.
41. Leng, M., Paseau, A., & Potter, M. (Eds.). (2007). Mathematical Knowledge. Oxford et al.: Oxford University Press.
42. Linnebo, $\phi$. (2017). Philosophy of Mathematics. New Jersey and Oxfordshire: Princeton University Press.
43. Miró Quesada Cantuarias, F. (1963). Apuntes para una teoría de la razón. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
44. Miró Quesada Cantuarias, F. (1984). On the concept of reason. In J. J. Garcia,
45. E. Rabossi, E. Villanueva, & M. Dascal (Eds.), Philosophical Analysis in Latin America (pp. 397-411). Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
46. Panza, M., & Sereni, A. (2013). Plato's Problem. An Introduction to Mathematical Platonism. Hampshire and Ney York: Palgrave Macmillan.
47. Parrochia, D. (2018). Mathematics and Philosophy. London and Hoboken: ISTE and John Wiley & Sons.
48. Torretti, R. (1998). El Paraíso de Cantor. La Tradición Conjuntista en la Filosofía Matemática. Santiago de Chile: Editorial Universitaria y Universidad Nacional Andrés Bello.
49. van Heijenoort, J. (Ed.). (1967). From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Cambridge: Harvard University Press.
50. Wang, H. (1963). A Survey of Mathematical Logic. Peking & Amsterdam: Science Press & North Nolland Publishing Company.
51. Wang, H. (1974). From Mathematics to Philosophy. New York: Routledge.
52. Wang, H. (1981). Popular Lectures on Mathematical Logic. New York: Dover.
53. Wang, H. (1991). Reflexiones sobre Kurt Gödel. (P. Castillo Criado, Trad.) Madrid: Alianza.
54. Wedberg, A. (1955). Plato's Philosophy of Mathematics. Stockholm: Almqvist & Wiksell.

## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/vZpIsV0xWV4

COMPENDIO DE PONENCIAS CHFM 2022

https://sites.google.com/unitru.edu.pe/chfm

Research

website

Article submitted to journal

**Subject Areas:**

01A99

**Keywords:**

Didáctica de la matemática,

Competencias del profesor.

**Author for correspondence:**

Luis R. Pino - Fan

e-mail: luis.pino@ulagos.cl

# MODELO DEL CONOCIMIENTO Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DEL PROFESOR

Luis R. Pino - Fan [1]

Universidad de lagos, Chile.

[1] luis.pino@ulagos.cl

## 1. Descripción de la propuesta

Uno de los problemas de investigación que cada vez cobra más interés en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, es el de determinar y desarrollar cuáles son los conocimientos y las competencias clave para que los profesores de matemáticas se desempeñen idóneamente en su práctica profesional. A propósito, diversos autores han desarrollado estudios que han derivado en el planteamiento de modelos que tratan de describir los componentes del conocimiento del profesor de matemáticas.

En esta Conferencia se presentan los recientes avances de la propuesta de un modelo del conocimiento y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) del profesor, que se basa en supuestos teóricos del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, y el cual viene desarrollándose desde el 2009 en diversos trabajos (Godino, 2009; Pino-Fan Godino, 2015; Pino-Fan, Assis Castro, 2015).

El modelo CDM (Figura 1) propone que los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores pueden organizarse o desarrollarse de acuerdo a tres grandes dimensiones: matemática, didáctica y meta didáctico-matemática. La dimensión matemática alude a los conocimientos que debe tener un profesor de las matemáticas escolares que enseña; la segunda dimensión alude a los conocimientos sobre aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas (conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, recursos y medios, interacciones en el aula y aspectos ecológicos). La tercera dimensión, dimensión meta didácticomatemática, alude a los conocimientos que debe tener un profesor para poder sistematizar la reflexión sobre su práctica y así emitir juicios valorativos sobre su práctica o la de otros (Pino-Fan, Godino y Font, 2016; Breda, Pino-Fan y Font, 2017).

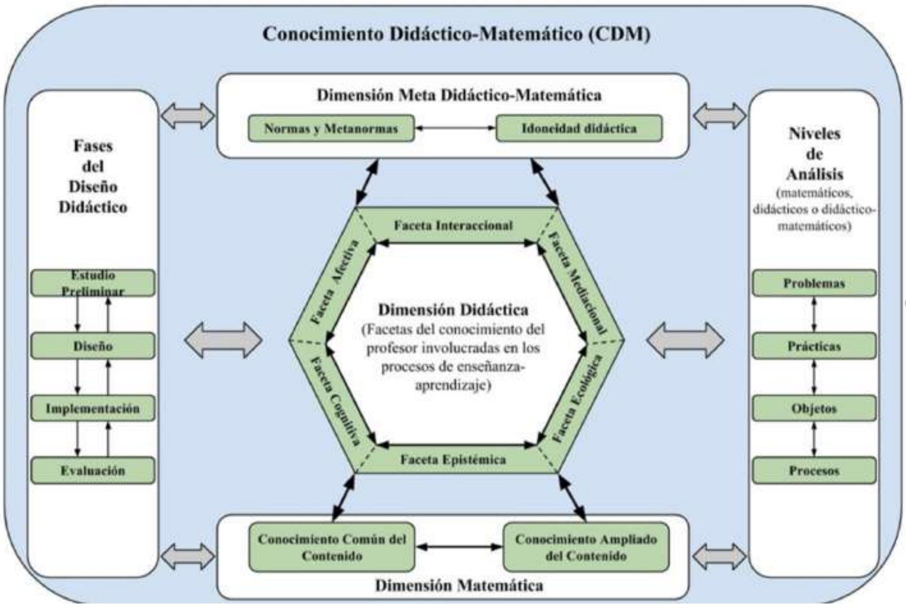



**Figura 1.** Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 103)

Es importante señalar que, para cada una de las dimensiones y subdimensiones (o facetas) del CDM, el modelo también propone "herramientas analíticas" que permiten operativizar cada una de tales categorías (tanto para la caracterización como para el desarrollo de las mismas).

Además, se espera que el profesor de matemáticas esté capacitado para abordar problemas didácticos básicos en la enseñanza de esta materia mediante la aplicación de unas herramientas teóricas y metodológicas, dando lugar, por tanto, a una serie de competencias específicas. Así, el modelo CDM se ha seguido desarrollando, y en la actualidad permite el estudio y nos da directrices para el desarrollo de competencias clave para la actividad del profesor de matemáticas. Aparecen así dos cuestiones clave para desarrollar el modelo CCDM: 1) ¿cómo se entiende la noción de competencia? y ¿cuáles son las competencias clave que debe tener el profesor de matemáticas?

La competencia en el modelo CCDM se entiende desde la perspectiva de la acción competente, considerándola como el conjunto de conocimientos, disposiciones, etc., que permite el desempeño eficaz en los contextos propios de la profesión de las acciones citadas en su formulación. Así, en el modelo CCDM se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, cuyo núcleo consiste en: "Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora" (Breda, Pino-Fan y Font, 2017, p. 1897). Para desarrollar esta competencia el profesor necesita, por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otra, necesita conocimientos para valorar lo que ha sucedido y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones.

El modelo CCDM abre un potente programa de investigación y desarrollo, focalizado en el diseño, experimentación y evaluación de intervenciones formativas que promuevan el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta las distintas categorías de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, las cuales se presentan y explican en esta conferencia.

El modelo CCDM abre un potente programa de investigación y desarrollo, focalizado en el diseño, experimentación y evaluación de intervenciones formativas que promuevan el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta las distintas categorías de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, las cuales se presentan y explican en esta conferencia.

**Agradecimientos:**

Proyecto Fondecyt N o 1200005 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID).

## Referencias

1. Breda, A., Pino-Fan, L., Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. Eurasia Journal of Mathematics, Science Technology Education, 13(6), 1893-1918. doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a
2. Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13 – 31.
3. Pino-Fan, L., Assis, A., Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. Eurasia Journal of Mathematics, Science Technology Education, 11(6), 1429-1456. doi: 10.12973/eurasia.2015.1403a
4. Pino-Fan, L., Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didácticomatemático del profesor. PARADIGMA, 36(1), 87-109.
5. Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V. (2016). Assessing key epistemic features of didacticmathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. Journal of Mathematics Teacher Education. doi:10.1007/s10857-016-9349-8.

## Conferencia en CHFM

https://youtu.be/-jBb5HEH0_U