REVISTA THEOREM

FILOSOFÍA, HISTORIA Y DIVULGACIÓN DE LA MATEMÁTICA

Vol. 1 Núm: 1 (2025)
ISSN: 3084-7761
Depósito legal:Nº2025-05146

HISTORIA Y FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA
UNT-UNPRG-UMAG

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TRUJILLO
UNT

https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/

Revista THEOREM
Vol. 1, N°1-Enero-Diciembre 2025
Universidad Nacional de Trujillo
Diego de Almagro 326, Trujillo, Perú
Depósito legal N°2025-05146
ISSN: 3084-7761

EDITORIAL

La Revista de Historia y Filosofía de la Matemática – Theorem, sale a luz, como un esfuerzo conjunto entre la Universidad Nacional de Trujillo (Perú), la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo (Perú) y la Universidad de Magallanes (Chile) con el propósito de difundir con un punto de vista original, el conocimiento histórico – filosófico y cultural de la matemática. Además, de publicar reseñas de libros y artículos publicados recientemente, entrevistas a personajes relevante en el quehacer matemático de Hispanoamérica.

La Revista Theorem, está dirigida a la comunidad matemática de habla hispana, muy en particular a los profesores de matemática de todos los niveles educativos y matemáticos profesionales que tengan interés en la dimensión humana y cultural de la matemática.

El Comité Editorial y árbitros especializados determinan acerca de los trabajos que se ajusten a los propósitos de la revista.

Los autores de trabajos deberán informarse de las normas de publicación en:
https://hfm.unitru.edu.pe/revista-theorem/

Finalmente quisiéramos agradecer a nuestras instituciones, por el apoyo que nos han brindado, sin el cual no hubiera sido posible este primer número de la Revista Theorem. Además, expresamos nuestro profundo agradecimiento a cada uno de los autores de este primer número, quienes han sido muy generosos en compartir sus conocimientos e investigaciones.

Los Editores

Índice

FILOSOFÍA, HISTORIA Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA THEOREM
https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/
ISSN: 3084-7761
Año 2025 - Nº001

Tres Precursores de la Matemática en el Perú.
Alfred Rosenblatt, José Tola, José Ampuero

Alejandro Ortiz Fernández
Honor a las memorias de los tres Maestros mencionados.
jortiz@pucp.edu.pe
Perú

Resumen

En este artículo se rescata a los profesores que impulsaron la matemática moderna en el Perú.

1. Introducción

Rescatar los valores de quienes aportaron al progreso de la matemática en nuestro país es importante ya que ello nos motiva a continuar, de algún modo, con el avance de nuestra ciencia. En este contexto hemos escogido tres personajes que iniciaron el desarrollo de la matemática moderna en nuestro país a partir de los años 1930's; ellos son Alfred Rosenblatt, José Tola y José Ampuero, quienes, además, tuvieron la visión de formar discípulos en una época en que la carrera de la matemática era casi desconocida.

2. Alfred Rosenblatt

Una de las grandes Escuelas de Matemáticas fue la polaca en donde surgieron notables matemáticos, como S. Banach y muchos otros. Lamentablemente ella sufrió horriblemente los estragos de la II - Guerra Mundial en donde se cometieron crímenes y torturas a muchísimos matemáticos, y en general al país polaco, entre ellos lo sufrido por Banach.

Viajemos al pasado, a la segunda mitad de los años 30's e inicios de los 40′s; en 1936 llega a nuestro país el matemático polaco A. Rosenblatt por invitación del Prof. Godofredo García, docente de la Universidad de San Marcos. ¿Cómo era el ambiente matemático en el Perú en esa época? La enseñanza de los cursos clásicos, cálculo infinitesimal, geometría analítica, ...eran hechos, de modo general, sin el rigor necesario; aún no existía una matemática pura como método para enseñar los cursos de matemáticas. Aún estaba vigente la influencia de Federico Villarreal y de sus discípulos, entre ellos de G. García quien modernizó la investigación de la mecánica racional, estudiando la teoría de la relatividad de Einstein, toda una novedad en nuestro país. Como se sabe, en los siglos XIX y XX en Europa la matemática hizo grandes progresos en las áreas del álgebra, de la variable compleja, del análisis funcional, la topología; se introdujeron los espacios abstractos y la física hace uso de estos avances para introducir nuevas teorías que condujeron a la física moderna.

Casi toda esa información trajo Rosenblatt a nuestro país, quien vino a radicarse por circunstancias muy especiales. Veamos.

Rosenblatt nació el 22 de Junio de 1880 en Cracovia, Polonia; desde muy joven muestra condiciones favorables para la matemática; estudia en la Facultad de Filosofía de la Universidad de Jagellónica

EDICIÓN 2025

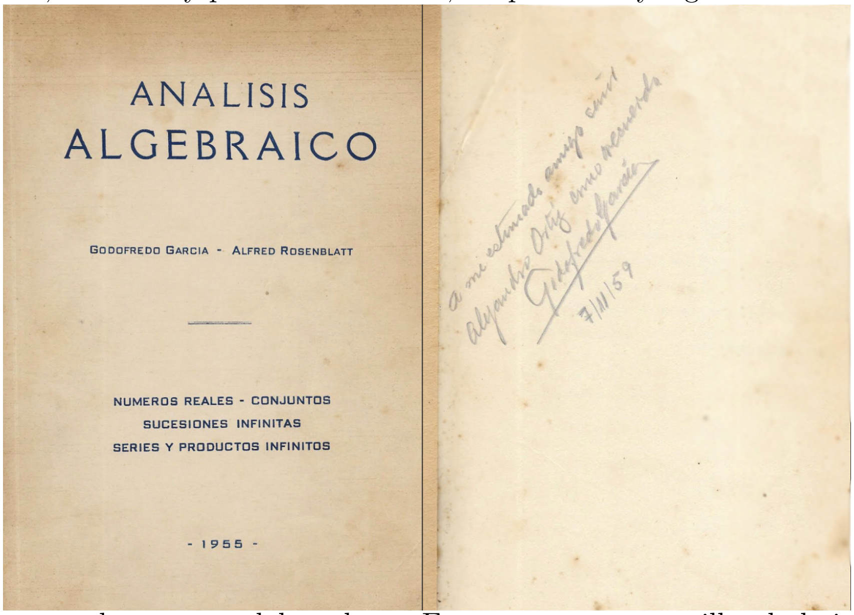
en Cracovia donde obtiene su grado de Doctor con la tesis: *Sobre las funciones enteras con variables complejas*. A partir de entonces inicia una notable carrera matemática y de docencia universitaria a alto nivel, Comienza a publicar trabajos de reconocimiento internacional . Cuando Rosenblatt ya era un reconocido científico, G. García siendo Decano de la Facultad de Ciencias de San Marcos viaja a Europa en misión de tener contactos con científicos de Europa; conoce a los profesores Sierpinsky y Rosenblatt dos reconocidos matemáticos, eran los años 30. Muchos de los matemáticos polacos tenían ascendencia judía y como tales fueron perseguidos por los nazis, entre ellos estaba Rosenblatt. García lo invita para que visite el Perú y se incorpore como docente de la Facultad de Ciencias de San Marcos. Rosenblatt acepta y viene a nuestro país en 1936. Así, se inicia una nueva etapa en la historia de la matemática en el Perú pues surge una nueva metodología de enseñar e investigar, en base a temas de actualidad al estilo europeo; y esto produjo algunas investigaciones en matemática pura como en algunas aplicaciones en la mecánica celeste y relatividad a cargo de G. García y de un reducido número de colaboradores de él.

En este ambiente se crean la Revista de Ciencias de la Facultad de Ciencias, así como de las Actas de la Academia de Ciencias, las cuales serian los medios donde se publicaron los artículos de Rosenblatt, y otros, que dieron prestigio a la matemática de nuestro país. Así mismo Rosenblatt dictó cursos sobre temas de actualidad de entonces, muchos de ellos por primera vez en el Perú. En realidad Rosenblatt tuvo una gran producción científica en diversos campos de la matemática los cuales fueron escritos con rigor y alta calidad de argumentos. En San Marcos tuvo pocos, pero entusiastas alumnos, que desearon también contribuir al progreso de nuestra ciencia. El Prof. Tomás Nuñez Bazalar fue uno de ellos y escribió el artículo *Vida y Obra de Alfred Rosenblatt*, Revista Fac. de Ciencias San Marcos, No 2.1988, en donde nos da una relación detallada de 225 trabajos de Rosenblatt, relación que está distribuida por años; comienza en 1903 y termina en 1947, año de su fallecimiento; tales artículos fueron escritos en diversos idiomas: polaco, inglés, francés, alemán, italiano y en español. Algunos de estos escritos fueron publicados en revistas de prestigio internacional y muchas de ellas en la Revista de Ciencias y así se tuvo un prestigio internacional. Es oportuno mencionar una anécdota: cuando Rosenblatt vino al Perú ya era un matemático consagrado en Europa, sin embargo en San Marcos, por esas cosas propias de nuestro país, le exigieron que presente una tesis para graduarse de doctor, lo que hizo sin dificultad alguna; su tesis fue: *Sobre la representación conforme en dominios planos limitados variables*.

La mayoría de sus artículos fueron escritos en forma personal, algunos en coordinación con otros colaboradores, en particular con su colega Godofredo García en donde dan énfasis al área de la mecánica celeste; algunos de esos trabajos son: *Sur la formule de Stokes dans la théorie de al gravité*, 1937; *Sur al régularisation du problemé plan des trois corps*, 1937: *Sobre el problema de los tres cuerpos en el plano*, 1938. Con el entonces joven José Tola publican *Cálculo provisorios para los contactos en el eclipse de Sol del 8 de Junio de 1937*, 1937. En sus trabajos se aprecia su interés por las ecuaciones diferenciales, por el problema de los tres cuerpos en la mecánica celeste, por el movimiento de los líquidos y por la teoría de superficies.

Por su prestigio como investigador y por su trayectoria como Maestro, Rosenblatt fue invitado a exponer conferencias, tanto en el Perú como en el extranjero en donde hablaba sus propias investigaciones; así expuso en la Facultad de Ciencias de San Marcos, en la Academia de Ciencias, en las universidades de Roma, Belgrado, de Sofía, en la Sorbona de París, en Princeton, en Illinois, en Lieja, ... Participó también en diversos congresos internacionales prestigiando así a nuestro país. Fue miembro de diversas sociedades científicas y así recibió una medalla por la Universidad de Lieja en 1930.

La labor docente de Rosenblatt fue fundamental en nuestro país pues a partir de entonces se enseñó cursos de nivel avanzado; dirigió seminarios y algunas tesis, como la tesis doctoral de J. Tola sobre un problema de topología. Con Godofredo García escribió el libro: *Análisis Algebraico*, el que fue publicado en 1955. Es una obra clásica de 247 páginas que contiene interesantes temas que para la realidad de entonces en nuestro país eran temas casi desconocidos y de gran valor matemático. Así, el capítulo 1 está dedicado a los números reales, que es tratado con el rigor y actualidad de entonces; dan también algunos comentarios históricos-filosóficos de este importante concepto. El libro consta de cinco capítulos donde exponen, además, los números naturales, elementos de teoría de conjuntos de puntos sobre una recta; tratan las sucesiones, las series y productos infinitos; las potencias y logaritmos.



Como anécdota digamos que en 1959, con mi profesor Alberto Vidal visitamos al Profesor Godofredo García en su casa; ya estaba retirado de San Marcos y nos relató algunas historias de su vida académica. El Profesor tuvo la gentileza de obsequiarnos, al Prof. Vidal y a mí, un ejemplar de su mencionado libro (autografiado), que lo conservamos con mucho cariño.

Por el lado humano, quienes lo conocieron coinciden en que Rosenblatt tenía una personalidad reflexiva, serena, que tenía un carácter severo para el trabajo pero a la vez tenía un carácter amigable con sus alumnos y colaboradores. Era una persona sencilla, de baja estatura con rostro típico judio-polaco. En la UNT tuve un profesor que había sido en algún momento asistente de Rosenblatt y nos contaba que gustaba comer chocolates y maní durante sus clases. Estando en Lima se enteró de la invación nazi a su querida Polonia, de las torturas y muerte de muchos de sus familiares, colegas y amigos, así como lo que esa tragedia significaba para la ciencia, para la matemática y en general para la inteligencia polaca pues los nazis lo destruyeron todo! Las personas cercanas a él recuerdan que muchas lágrimas, tristezas, dolor, invadieron su persona.

La invitación de García y su permanencia en el Perú podría haber llevado a Rosenblatt a pensar que ese destino le salvó la vida o desgracias mayores y por ello se nacionalizó peruano y así contribuir con su ciencia al reconocimiento internacional de nuestro país y también gozar del aprecio de la intelectualidad de entonces.

Llegamos a 1947. Rosenblatt tuvo bronconeumonía y en su primera oportunidad logró recuperarse, no así en la segunda. Nuestro gran matemático murió el 8 de Julio, dejando un legado importante a las nuevas generaciones, quienes deberían conocer su vida y obra que debe perdurar en el tiempo!

Post Data. El Profesor Flavio Vega Villanueva fue alumno de Rosenblatt; pasados los años, su viuda, Sra. Margarita nos obsequió un libro que perteneció a Rosenblatt y donde aparece su firma; conservamos este libro como una reliquia histórica,

3. José Tola Pasquel

En la vida de una persona, a veces, se da las circunstancias entre escoger el éxito profesional - económico o seguir la vocación aún cuando esta no sea muy rentable y conocida. Esto fue la alternativa que tuvo Don José Tola, un ingeniero que pudo tener muchos beneficios económicos y sociales como tal para dedicar su vida a ser un matemático dedicado a la docencia y la investigación cuando en nuestro país la matemática no era muy conocida y valorada. Al tomar esta decisión, contribuyó con algo esencial: continuar con la labor iniciada por Rosenblatt y luchar por crear un ambiente para el desarrollo de la matemática en nuestro país; Tola se esforzó en poner las bases para la construcción de una ciencia y una tecnología de un mejor nivel académico posible. Esta labor no fue fácil pues hubieron dificultades propias de un país como el nuestro.

Parte de este escrito será mi relación con el Profesor Tola porque quien sabe es lo menos conocido y capaz pueda haber algún mensaje para las nuevas generaciones. Veamos. Por primera vez conocí Lima en 1957 . Era un invierno con calles muy frías que nos hacían recordar las calles cálidas del Trujillo de entonces. Mis profesores Alberto Vidal y Oscar Valdivia en la Universidad Nacional de Trujillo ya

https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/ ISSN: 3084-7761

me habían narrado aspectos de la vida académica de la matemática habida en la Universidad de San Marcos; es así como ya conocía de nombre a los profesores Tola, Ampuero, Reátegui, Ramos, Vega, Dávila, Nuñez, entre otros más; todos ellos discípulos de Rosenblatt . Ya tenía algunas ideas de tales profesores y de sus labores como tales pero mi anhelo era conocerlos en persona y capaz recibir algún consejo de ellos; yo era un estudiante del segundo año de estudios. Como se comprenderá mi primer deseo fue visitar la Casona del Parque Universitario donde funcionaba la universidad. Eso hice. En ese entonces era la Escuela Instituto de Matemáticas y la única en el país que formaba matemáticos y físicos en el país.

En esta oportunidad no pude conocer al Dr. Tola pues creo que los profesores no eran a tiempo completo y él como ingeniero tenía sus propias ocupaciones. Sin embargo en esta ocasión pude conocer la Escuela y algunos de sus profesores a la distancia pues, como un provinciano que conocía a la gran ciudad por primera vez, me sentía un poco tímido ante un nuevo panorama. Sin embargo, en esa oportunidad pude conocer de vista a algunos profesores y sobre todo a algunos estudiantes con quienes hicimos amistad, la que perduró para siempre. Uno de esos jóvenes fue Juan Guerra T., quién fue un destacado estudiante, con mucho talento para las matemáticas que lamentablemente murió a temprana edad en Europa cuando estaba por sustentar su tesis de doctorado. También escuchamos mucho el nombre del Profesor Ampuero y de otros. Nuestro encuentro con el Prof. Tola se realizó en otro viaje que hice a Lima.

En esos años, fines de los 50's, el Ing. Tola tenía un gran prestigio como calculista, tenía fama como tal, y era una persona muy ocupada pues también era profesor en San Marcos. Es en este escenario en que tuve el primer encuentro con él. En San Marcos me informaron que podía encontrar a Tola en su oficina de ingeniero que quedaba en una esquina de la Plaza de Armas; de alguna manera llegué a ese lugar y mi timidez afloró de nuevo pues sabía lo ocupado que era el ingeniero. Toqué la puerta; salió un joven, posiblemente un ingeniero que era su colaborador, me presenté y me hizo pasar y que esperara un rato pues el ingeniero estaba revisando unos planos. En efecto, por la ventana observé que Don José estaba discutiendo con un grupo de ingenieros alrededor de un conjunto de planos. Me sentí incómodo. Don José al verme se dirigió a mí y le expliqué el motivo de mi visita; me dijo que esperara un poco. El entretiempo me permitió observar la atención que ponían los ingenieros a las explicaciones que les daba Tola, seguramente con un lenguaje preciso, como buen matemático que era. Luego vino a atenderme. Yo pensaba en una entrevista muy corta por las razones dadas, sin embargo no fue así ya que Don José mostró mucho interés en cómo iban las cosas matemáticas en Trujillo; yo le explicaba el panorama que teníamos y cada vez surgían nuevas preguntas; ante las dificultades habidas en Trujillo, él me aconsejaba y me estimulaba a seguir adelante, pues en San Marcos también habían dificultades y esto era propio en un país como el nuestro en que la matemática pura no era bien conocida y por tanto no apreciada. La entrevista duró un buen tiempo: Me despedí muy estimulado y contento de haber conocido a un profesor que tuvo la generosidad de haberme dedicado tiempo y de extender su influencia matemática a las provincias.

Con tal experiencia, siempre que podía visitaba a Don José en San Marcos, así como a otros profesores y a mis amigos estudiantes. En 1960 yo ya era profesor en la UNT; con mi profesor Vidal, algunos colegas y alumnos se tuvo la iniciativa de invitar al Dr. Tola a la Universidad Nacional de Trujillo, quien vino acompañado del entonces joven matemático José Reátegui. Se concretó la visita y ellos nos ofrecieron dos conferencias. Era la primera vez que llegaban a Trujillo dos doctores en matemática y ello causó gran interés en los estudiantes. Tola expuso sobre algunos aspectos de la estructura de los espacios de Hilbert y Reátegui sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, temas que por primera vez escuchamos y nos despertó cierta curiosidad por saber algo más. A las conferencias asistió un buen número de estudiantes y profesores, acto que se hizo en el auditorio de la Facultad de Medicina pues Matemática no tenía local propio, menos un auditorio.

Como hemos mencionado San Marcos era la única universidad en formar matemáticos; en 1960 en la UNT hubo el inicio de una nueva generación de profesores en la Sección de Matemáticas pues Pedro González Cueva y yo asumimos la responsabilidad de dar una mejor formación a nuestros estudiantes y así hacer méritos para que pronto la Sección pase a ser Facultad en donde la matemática se separa de la física y comienza a surgir la estadística. En particular, en nuestra tarea como docente me ayudaron mucho mis contactos con el Profesor José Ampuero y la influencia del Profesor Tola con quién traté de tener siempre algún contacto. En 1961 tuve una recargada labor de dictado de clases pues tuve 5 cursos a mi cargo, de 6 horas semanales cada una: aritmética teórica, análisis matemático l y lI, álgebra moderna y topología general. Ya tenía alguna experiencia de los tres primeros cursos, no así de los dos últimos. El Prof. Tola enseñaba álgebra moderna en San Marcos y me informé de que los estudiantes sacaban una notas del curso mimeografiadas; adquirí esas notas, las estudié y así pude enseñar, de algún modo, el curso. Para el curso de topología me sirvió mucho el seminario que hicimos con el Prof. Ampuero. Así es como en Trujillo se vio por primera vez las estructuras algebraicas, las ideas de grupo, anillo, entre otros cursos y de esta manera la influencia de Tola fue importante, además de estimulantes palabras que recibí mientras enseñaba el curso. Tola en la segunda mitad de los 50's escribió en la Revista de la Escuela unos artículos didácticos sobre topología general los que me sirvieron para motivar mis clases. Debemos remarcar que la topología en esos años era casi desconocida en nuestro país, sobre todo en provincias.

José Tola Pasquel nació el 12 de febrero de 1914 en Lima en el seno de una distinguida familia que se instaló en Barranco en sus primeros años. Estamos a inicios de los años 1930's; Tola en su juventud mostró condiciones para la matemática, algo que como carrera profesional no era muy comprendida y en esa época los jóvenes con talento matemático estudiaban ingeniería, algo que de algún modo sigue actualmente. Es así que postula e ingresa a la antigua Escuela de Ingenieros, una institución de alto prestigio pues fue fundada por ingenieros polacos quienes introdujeron las metodologías de su país, como sus reconocidos exámenes de ingreso en donde se exigían una matemática básica lejos de la formación que se recibían en los colegios estatales. Esta situación también se produjo en otros países, como Argentina y Brasil, en donde algunos matemáticos notables fueron primero ingenieros. Tola ingresa a la Escuela en 1931 pero por razones políticas ella es cerrada al poco tiempo y por ello sus estudios los hace en la naciente Facultad de Ingeniería en la Pontificia Universidad Católica del Perú en donde obtiene el título de ingeniero civil en 1938. Pero su inquietud por la matemática estaba latente e indaga donde la podía estudiar. Así llega a San Marcos, a la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, que funcionaba en la Casona del Parque Universitario. En realidad debemos destacar que sus estudios de ingeniería y de matemáticas los hace en forma simultánea; de esta manera en 1937 obtiene el grado de Bachiller (que antes era un poco difícil obtenerlo en San Marcos) en matemáticas con la tesis: *Sobre la existencia y la unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias*-Remarcamos que en aquella época era algo singular que un joven se dedicara a la matemática pura; la presencia de Rosenblatt en San Marcos es muy posible que haya influido en el joven Tola a tales estudios y así pudiera entrar a una matemática a la europea. Así, por ejemplo, el álgebra moderna comenzó a enseñarse en el Perú y Tola fue uno de los primeros en hacerlo ;el profesor tenía como referencia bibliográfica al libro de B. L. van der Waerden, dos volúmenes, que le serviría de base a las lecturas dadas a sus pocos alumnos. Tola fue uno de los pocos alumnos de Rosenblatt que aprovechó el conjunto de conocimientos que trajo el matemático polaco, áreas como las variables complejas, el análisis moderno, la topología, las nuevas teorías de la física, entre otras áreas. Tola supo aprovechar este conjunto de conocimientos, de compartirlo con sus alumnos, y éstos con sus nuevos alumnos; esta transitividad permitió introducir en nuestro país una matemática más rigurosa, sobre todo en las provincias, como Trujillo.

El Profesor Tola tenía una personalidad que inspiraba respeto al primer contacto con él; una voz enérgica para transmitir sus ideas. Los que tuvieron la suerte de ser sus alumnos directos y escucharon sus lecturas son de opinión de la brillantez y cuidado con que exponía la matemática. En su inicio él fue profesor de San Marcos por los años 50′s formando un pequeño grupo de jóvenes que continuaron con su labor en la universidad; luego, debido a algunos problemas internos, pasó a ser docente en la Universidad Nacional de Ingeniería llevando consigo a algunos de sus alumnos-docentes; en esta universidad hizo una labor destacable tanto en la matemática pura como en la enseñanza de la matemática; fueron notables las recordadas *Escuelas de Verano* para profesores de secundaria a donde acudían profesores de provincias, y del extranjero también. Nuevamente, por dificultades para hacer una labor en pro de nuestra ciencia, Tola y su grupo pasó a la Pontificia Universidad Católica del Perú, en donde permaneció hasta sus últimos días. Como docente Tola enseñó, entre otros temas, álgebra moderna, análisis real, topología, variable compleja, control óptimo, cálculo de variaciones, ecuaciones diferenciales; Tola fue un alumno distinguido de Rosenblatt y bajo su asesoría elaboró su

https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/ ISSN: 3084-7761

tesis doctoral sobre un tema de topología; era 1941 y en esa época en nuestro país ese tema, y otros eran desconocidos. Su tesis fue *Sobre la equivalencia de dos formas de continuidad de operaciones, por sucesiones y por entornos, en espacios vectoriales topológicos*. Su labor docente y sus trabajos matemáticos le dieron la imagen y la autoridad para heredar la posta de sus maestros e iniciar una etapa de liderazgo en el desarrollo de la matemática en el Perú.

Tola también tuvo que ocuparse en aspectos administrativos y académicos en las diversas universidades a las que perteneció en una época en que estos cargos demandaban mucho tiempo y energías, sin embargo se dio tiempo para no descuidar la matemática como estudio e investigación; así logró escribir como doce libros sobre variados temas. Por todo ello recibió distintas distinciones y homenajes en reconocimiento a su productiva labor, sobre todo por su condición de Maestro.

La personalidad humana del Profesor Tola estuvo basada en el cultivo de valores éticos tanto científicos como artísticos. En el mes de febrero de 1989 cesé de la UNT y al mes siguiente fui profesor de la PUCP, esto debido a la generosidad del Prof. Tola quien desde tiempo atrás me invitó a ser docente en tal universidad. Ahora tenía la oportunidad de estar más cerca de él y sentirme estimulado para trabajar en una nueva experiencia universitaria.

El Dr. Tola fue fuerte de espiritu para enfrentar y superar duras pruebas que la vida nos da y nos pone a prueba; así, supo encarar algunas ingratitudes y conflictos habidos en algunas instituciones donde laboró. La muerte de su esposa lo tomó con la serenidad y sabiduría de quien ha cumplido en vida con el ser amado. Los años pasan y el alma se enriquece con lo vivido y servido; pero el cuerpo, lo físico y lo transitorio sigue su evolución natural de decrecimiento, y las enfermedades afloran; Don José no escapó a esta regla general. Así, el 12 de enero de 1999, Don José Tola P. falleció dejando un legado que las futuras generaciones sabrán reconocer, valorar y seguir adelante con el progreso de la matemática en nuestro país. Así será!

4. José Ampuero Aguayo

En la actualidad existen muchísimas publicaciones sobre el sistema de los números, en particular sobre los números reales; los hay en distintos niveles y de rigor matemático; lo mismo sucede con el área del análisis matemático en donde se ofrece el cálculo diferencial y el integral. De esta manera un estudiante de ciencias tiene muchas referencias bibliográficas por escoger . Pero por los años 1950's esta no era la situación, sobre todo en provincias como Trujillo, donde eran pocos los libros de matemática básica conocidos; no habían bibliotecas especializadas; a esto hay que agregar que el sistema de comunicación era muy lento; pocas noticias de libros nuevos se recibían; solo algunos clásicos libros de cálculo infinitesimal, geometría analítica, álgebra, y otros, eran conocidos.

Por otro lado, San Marcos era la única universidad que formaba matemáticos y ya vimos los aportes de Rosenblatt, Tola y algo de G. García; a ellos le debemos conocer algunos libros que usaban en sus lecturas; es oportuno rescatar la contribución de Cristóbal de Losada y Puga quien fue profesor de geometría analítica, cálculo infinitesimal y mecánica racional en la Pontificia Universidad Católica del Perú, quien escribió unos libros de matemática que tuvieron alguna influencia en aquellos tiempos.

Este es más o menos el panorama del país por los años 1950's y es también el escenario en que surge la contribución del Profesor José Ampuero. Don José nació el 26 de abril de 1922 en Lima; sus estudios de primaria y secundaria los realizó en Barranco, un histórico lugar. Según quienes lo conocieron de joven tenía un carácter retraído y luego fue moldeando una personalidad de estudio, de trabajo así como de servicios a los demás, virtudes que conservaría el resto de su vida. Terminados sus estudios de secundaria en donde fue un buen estudiante en ciencias, en 1940 ingresa a la Facultad de Ciencias de la Universidad de San Marcos y se matricula en la especialidad de matemáticas. Como sabemos, San Marcos funcionaba en la Casona del Parque Universitario en un ambiente señorial, con una estructura colonial que invitaba al estudio y a la discusión académica; por los pasillos y el Patio de Ciencias transitaban maestros como Rosenblatt, Godofredo García, así como el joven J. Tola. En

https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/ ISSN: 3084-7761

este estimulante ambiente el estudiante Ampuero inicia sus estudios bajo la enseñanza de los citados profesores. En particular él aprende de Rosenblatt la matemática moderna, en particular el análisis matemático desde sus fundamentos basados en la idea de número real, ideas que posteriormente las enseñaría en sus cursos dados en San Marcos. También, Ampuero fue alumno de Tola y así la Escuela de Matemática va sentando las bases para una mejor enseñanza de la matemática. El Profesor Ampuero termina sus estudios en la Facultad en 1944.

Por sus méritos y en reconocimientos a sus estudios realizados, Ampuero ingresa a la docencia en la Facultad de Ciencias en 1945 dictando cursos básicos, como el sistema de los números y el análisis matemático. En aquella época en el sistema universitario no existía la dedicación exclusiva y por ello comparte su labor como profesor del colegio Leoncio Prado y en el colegio América del Callao. Es posible que desde aquel entonces ya iba madurando la elaboración de unas notas en donde sus alumnos pudieran completar sus aprendizajes de los fundamentos de los distintos sistemas de números, así como otras notas dedicadas al análisis matemático. Así dicta el curso de *Aritmética Teórica* y el curso de *Análisis Matemático*, I y II, cursos que se dictaron durante los años $1950'$s. Es oportuno mencionar que estos cursos, con el rigor matemático deseado, se dictaron por primera vez en el Perú y tuvieron influencia para que años después se enseñaran estos cursos con tal metodología en la Universidad Nacional de Trujillo.

Como mencionamos en la sección 3, conocimos Lima en 1957 y fue en esa oportunidad en que conocí al Prof.Ampuero pero ya tenía noticias de su persona. Veamos. Yo era estudiante y ese año llegaron a Trujilo dos egresados de San Marcos, Alberto Vidal C. y Oscar Valdivia G. (ya fallecidos) y aún cuando aún no eran mis profesores me gustaba conversar con ellos quienes me ilustraron sobre la matemática en San Marcos y me hablaban de los profesores de entonces, Tola, Ampuero, Reátgui, Ramos, Vega, Dávila, Nuñez, entre otros más. Como yo tenía cierta inclinación por el análisis tenía un interés especial en conocer al Prof. Ampuero; en efecto, con el Prof. Vidal fuimos a la Casona en su encuentro; nos informaron que el profesor había salido a tomar su diario clásico *té ralo* en un lugar que acostumbraba visitar. Fuimos a su encuentro; cuando caminábamos por cierta calle, él ya venía de regreso. Vidal lo saludó y me presentó. Con la emoción del caso le comenté mi interés en aprender los cursos que él enseñaba ya que mi formación no era buena, con muchos vacíos. El profesor me escuchó, me dio algunas palabras de aliento y que me podría ayudar en el futuro. Nos despedimos.

A partir de 1957 acostumbré venir a Lima siempre que podía; de esta forma tuve oportunidad de conocer el ambiente matemático de San Marcos, de conocer *de vista* a nuevos profesores y también de conocer más amigos estudiantes; era 1958 y yo cursaba en Trujillo el tercer año de matemáticas puras. Me informé que los estudiantes del Centro Federado sacaban unas notas, en el mimeógrafo, de algunos cursos, entre ellas de los cursos de aritmética teórica y de análisis matemático I y Il . Adquirí esas notas con mucho entusiasmo pues veía en ellas tantas cosas por aprender, entre ellas los famosos *epsilon* y *deltas* que en Trujilo ignorábamos. Las notas sobre aritmética fueron muy importantes por ser la base para todo el edificio matemático, sobre todo el concepto de número real (que anecdóticamente decimos: *terminamos los estudios de matemáticas y no teníamos claro que era este número*). Debemos reconocer que el aporte de Ampuero, vía estos cursos, fueron de una importancia pues motivó para que generaciones futuras tuvieran una mejor formación matemática. Las notas de aritmética salieron en forma completas y sirvieron para que en 1960 salieran como libro: *Aritmética Teórica* dentro del programa Textos Universitarios de la Universidad de San Marcos. Lamentablemente las notas de análisis no se publicaron como libro pues hubieran contribuido a la mejor enseñanza de esta área fundamental.

Con el Dr. Ampuero hicimos una relación amigable; siempre que podía lo visitaba y él apreciaba ésto y se interesaba por saber cómo iba la matemática en Trujillo; le narraba las cosas tal como fueron, con las dificultades matemáticas y no matemáticas habidas en un ambiente en donde se trataba de introducir ideas nuevas sobre la administración académica. Igual a lo que me dijo el Prof. Tola, el Prof. Ampuero también me dijo que en nuestras universidades siempre hay dificultades que superar por razones conocidas.

Un Seminario sobre Topología. En diciembre de 1960 tuve la sorpresa de recibir del Brasil un abultado paquete; el Profesor Leopoldo Nachbin, un lider de la matemática brasileña de entonces, me envió un conjunto de publicaciones, Notas de Matemática del IMPA, todas ellas con títulos muy sugestivos. Entre ellas venían *Topología General* de S. Mac-Lane y *Topología de los Espacios Métricos* de Elon L. Lima; estas eran las publicaciones que de algún modo entendí algo. Al inicio del verano de 1961 visité al Prof. Ampuero y dentro de la conversación le manifesté sobre tales publicaciones; surgió la idea de estudiar la publicación de Mac-Lane sobre topología, idea que se concretó al poco tiempo.

Se trabajaría en forma de seminario, yo haría las exposiciones y el profesor las ampliaría, aclararía las dudas y motivaría las discusiones del caso. Las sesiones se hicieron en el local de matemáticas en la Casona donde Don José disponía de un escritorio y de un amplio salón con una amplia pizarra. Estudiamos gran parte de la publicación haciendo las pruebas de los teoremas; para mi era la primera vez que participaba de un seminario, de estudiar y aprender matemática con esa metodología. Esta experiencia me sirvió de mucho pues el Prof. O. Valdivia que dictaba el curso viajó al extranjero a seguir sus estudios y el Decano de la Facultad me nombró como profesor del curso lo que asumí con las reservas del caso pues no había llevado el curso en el programa de mis estudios; además, la topología era toda una novedad en Trujillo, era *raro* que en matemática se trabaje con figuras curiosas; con la experiencia del seminario y estudiando la publicación de E. Lima creo que salió un regular curso. En julio de 1962 viajé al Brasil, a Brasilia, para hacer estudios del *Maestría* y mi relación con Don José se interrumpió por un tiempo.

En el aspecto personal José Ampuero optó el grado de Bachiller en Matemática en una época que obtener este grado era algo relativamente difícil; eran pocos los bachilleres que habían y si varios egresados. El obtener el doctorado era algo más raro, quien sabe porque aún no habían las condiciones administrativas para impulsar este grado; así, Ampuero adquiere su Doctorado después de un buen tiempo. Por otro lado, Don José se casa con la dama Eva Cruzat Castello en 1949, matrimonio del que nació su hija Eva María. Los años pasan; llegamos a 1983, año en que Don José se jubiló de San Marcos luego de tantos años recorridos, de satisfacciones compartidas con sus colegas, con sus alumnos y con el ambiente de la universidad a la que dedicó tantos años de estudios, de enseñanzas y sobre todo de haber contribuido a las nuevas generaciones con sus lecturas y escritos.

Mis recuerdos con el Profesor Ampuero fueron siempre un estímulo para seguir adelante. Aún cuando él tenía cargos administrativos (años $70'$s, $80'$s) y lo visitaba , se daba un tiempo para conversar y contarnos nuestras experiencias. Por sus méritos académicos, Don José es nombrado profesor emérito de San Marcos en 1987. Su salud era un poco delicada, sufría de asma. Sus últimos años los pasó postrado en cama. El mal seguía. Así, el 9 de diciembre de 1998 Don José Ampuero falleció dejando un gran recuerdo del Maestro y Amigo que tuvimos.

Dr. Alejandro Ortiz Fernández
Profesor Emérito Vitalicio de la UNT.
Ex Profesor de la PUCP.

FILOSOFÍA, HISTORIA Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA THEOREM
https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/
ISSN: 3084-7761
Año 2025 - Nº002

A ficitionalist approach to the ontology of mathematics

Gustavo E. Romero
Universidad Nacional de La Plata & Instituto Argentino de Radioastronomía (IAR)
gustavo.esteban.romero@gmail.com
Ciudad de La Plata

Abstract

Mathematics is defined as the study and development of conceptual interpreted formal systems that are closed by deduction. These systems are not merely syntactic in the manner of logistic systems. They are interpreted, but their reference class is constituted by conceptual artifacts. Mathematical constructs are human-made creations that exist solely within the context of a specific formal system. Consequently, mathematics is devoid of any ontological import. The referents of mathematics cannot exist independently of the human mind. The theory is consistent with any general materialist worldview.

1 Introduction

Mathematics is indispensable for the formulation of scientific theories about the world [1, 2]. However, there is no clear consensus on what kind of objects mathematics refers to. For Platonists, mathematics refers to things like numbers, sets, functions, manifolds, etc. [3]. They are willing to take this reference class at face value and accept the existence of such entities in the world. Nominalists, of course, reject such tolerance of abstract entities [4]. Some claim that mathematics refers to space-time points [5], and others that it does not refer at all [6]. Some materialists claim that mathematical symbols refer to themselves [7], i.e. to physical inscriptions. The variety of positions is wide, diverse, and somewhat confusing.

I declare myself to be a materialist. I do not accept the existence of ghosts, God, numbers, sets, functions, manifolds, etc. in the world. Nevertheless, I think that mathematics refers to some of these objects. To reconcile these claims in a coherent theory of mathematical ontology is the manifest purpose of this paper. The less obvious goal is to outline a philosophy of mathematics and to answer some criticisms that might be made of these views. I make no claim to originality. Similar ideas have been presented by several authors, most notably Vaihinger [8], Bunge [9, 10], Curry [11], Bueno [12], Woods [13] and myself [2]. However, the approach I will present and some details can claim novelty. Of the cited authors, only Bunge considered himself a materialist. My ultimate goal is to offer the scientist a theory of mathematics that is fully compatible with a materialist worldview [14].

I will begin with some preliminary remarks on formal languages, since I think of mathematics as a family of formal conceptual systems in the tradition of David Hilbert, Haskell Curry [11], and Alan Weir [15].

2 Preliminaries: formal languages and mathematics

Languages are conceptual and symbolic systems used for communication and representation. It is common to divide languages into *natural* and *formal* languages. Natural languages are the result of biological and cultural evolution. They play the role of a tool for communication. Because of how they evolved, they can be vague and imprecise. Translation between natural languages developed

EDICIÓN 2025

in different socio-cultural contexts is difficult, if not impossible, because of semantic indetermination [16, 17]. Formal languages, on the other hand, are designed to be free of these problems. They have explicit rules for the formation of valid terms based on a primitive vocabulary that is also explicit.

2.1 Formal languages

A formal language is a conceptual system equipped with a set of rules for generating valid combinations of symbols. A formal language L_1 is expressed in a metalanguage L_2, which can be formed by elements of L_1 and other languages (including natural languages), to avoid the formation of paradoxes. We can represent a formal language L_1 as a triplet:

$$L_1 = \langle \Sigma_{L_1},\, R,\, \Omega \rangle \,. \tag{1}$$

Here Σ_{L_1} is a set of language primitives, R is the set of rules that provide explicit instructions on how to form valid combinations of elements of Σ_{L_1}, and Ω is the set of objects denoted or designated by the elements of L_1. The set R is made up of three disjoint subsets:

$$R = S_{\mathrm{sy}} \cup S_{\mathrm{se}} \cup Pr, \tag{2}$$

where S_{sy} is a set of syntactic rules, S_{se} is a set of semantic rules, and Pr is a set of pragmatic rules. The first set consists of rules for forming terms that are allowed in the language, the second set consists of rules that relate terms of L_1 to objects of the discourse domain Ω, and Pr are pragmatic rules that should be adopted for the correct use of the language in a given context.

In addition to these rules, inference rules are usually added. The most common ones are:

- *Modus ponens* (MP): If $A \wedge (A \to B)$, then B.
- *Generalization rule* (Gen): If A, then $(\forall x)A(x)$, where x is a variable. In these inference rules, all the symbols are those usual in first order logic.

Definitions can also be built into the language to simplify notation and reduce the complexity of the various terms that will appear in the language. A definition is the elucidation of a new symbol in terms of other primitive symbols.

The operation of deduction makes it possible to obtain valid formulas from other valid forms. Deduction is the successive application of syntactic rules; the formulas obtained by deduction are called theorems. We use the symbol $\vdash$ to mean "this is a theorem". In particular, we say that a system S of formulas is *consistent* if and only if $\neg(S \vdash \phi \wedge \neg\phi)$ for all $\phi \in S$. The formula $\phi \wedge \neg\phi$ is called a *contradiction* and is usually excluded from formal languages because $\phi \wedge \neg\phi \vdash B$, where B is anything. In most cases we are interested in languages that are consistent, especially when they are used to represent extralinguistic objects. This is because things and events are not contradictory. They just are what they are. Contradiction can only occur in our languages.

If a formal language is such that $S_{\mathrm{se}} = Pr = \emptyset$, then the language is a *logistic system*. Logistic systems, or abstract languages, are purely syntactic. They do not refer to anything, because referring is a semantic relation.

2.2 Mathematics as a family of formal languages

Mathematics, instead, are a family of formal languages that clearly refer to entities such as numbers, sets, functions, manifolds, equations, etc. These objects, however, are carefully constructed in the framework of the corresponding mathematical theories. We shall call them, therefore, *formal constructs* or, more generally, *conceptual artifacts*. An artifact is something constructed by an intentional agent with a given purpose. If the artifact is conceptual, then its components and links are not material but created by a set of stipulations within a formal system. More specifically, we define:

Definition: An object x of a consistent formal system S is a *conceptual artifact* if, and only if, there is a well-formed set C such that $x \in C$ and C is specified in S.

C includes a subset of formation rules in S. Torretti [18] argues that this definition is circular because it invokes a conceptual artifact: the set C. But for every set C there will be another formal system S' such that $C \in C'$. What, then, about the set of all sets of conceptual artifacts? Since such a set cannot be formulated consistently [19] (i.e. it is ill-formed), it is not a conceptual artifact. Then, there is no circularity in our definition. Conceptual artifacts can only be introduced by their characterization in *consistent formal theories*.

We can now define mathematics as follows [2]:

Definition M1: *Mathematics* is the set of all *mathematical systems*,

where,

Definition M2: A *mathematical system* is a consistent formal system such that the semantic rules relate symbols in the system with conceptual artifacts, which are formed in accordance to constitutive rules that are exempt from any vagueness or ambiguity.

A statement in a mathematical system will be true if, and only if, the statement can be proved within the system, i.e. P is true in S iff $S \vdash P$. Then, truth, in mathematical theories, is equivalent to theoremhood.

Formal systems, and hence mathematics, are human creations. They are exact because the precise formation rules of their formulas are made explicit. They are conceptual because they are independent of any material object (with the exception of the human beings that create them). Formal systems exist only to the extent that there are people capable of thinking them. This does not mean they are subjective. They are perfectly impersonal and intersubjective. Any person can use the formation rules of the system to check the validity of all statements. Mathematics, therefore, is exempt from the vagueness that plagues natural languages. This is why mathematics is so useful for factual sciences: it provides an exact and unambiguous framework to express our ideas about the world.

2.3 Reference and meaning in mathematics

The meaning of mathematical terms is a two dimensional concept that we attribute to the term after the analysis of the particular system where the term occurs. Let us call T to a specific mathematical theory. A theory is a set of statements such that the set is closed under the operation of deduction, i.e. $T = \langle A, \vdash \rangle$, where A is a set of independent statements called axioms. Given a term x in a theory T, we define the meaning of x (denoted by $M_T(x)$) as

$$M_T(x) = \langle \mathcal{R}_T(x), \mathcal{S}_T(x) \rangle. \tag{3}$$

Here, $\mathcal{R}_T(x)$ is the *reference* of x in T and $\mathcal{S}_T(x)$ is the *sense* of x in T [20, 21, 2]. The reference is a relation between the term (symbol or chain of symbols) and a conceptual artifact. In the case of a predicate, it can be defined as the set of all its arguments. To illustrate, the assertion 'real numbers are commutative with respect to multiplication' refers to the domain of real numbers. It should be noted that the term "reference" is distinct from "extension". The statement '$\neg \exists x (x \,\text{is prime} \wedge 8 < x < 10)$' has an empty extension but refers to prime numbers.

In regard to the sense of a mathematical construct, it is defined as the union of all the items in a theory that entail or are entailed by it. In symbols, we have that $\mathcal{S}_T(c) = \{x : x \vdash c\} \cup \{y : c \vdash y\} = A_T(c) \cup J_T(c)$, where $A_T(c)$ is the purport or logical ancestry of c and $J_T(c)$ is the import or logical progeny of c in T.

It is my contention that mathematics is not, as some have suggested, a meaningless collection of symbols or inscriptions. Rather, it is a system of formal theories whose terms have a well-defined meaning. This is why we can comprehend them, grasp their referents, and discern their implications. Does this entail that I accept the existence of conceptual artifacts such as Hilbert spaces, numbers, or sets? No, it does not.

3 What is ‘to exist’?

In any discourse, there are two types of commitments: quantifying commitment and ontological commitment. Quantifying commitment is made to objects that are within the range of the variables of our quantifiers. Ontological commitment is incurred when we commit to the factual existence of certain objects. However, despite Quine’s view [22], quantifier commitment does not involve ontological commitment. This can be shown by distinguishing between partial quantifiers and existence predicates. The objective is to refrain from interpreting the existential quantifier as carrying any ontological commitment. In contrast, the existential quantifier merely indicates which objects fall under a given concept (or possess certain properties). The objects in question constitute a subset of the entire domain of discourse. To indicate that the entire domain is invoked (i.e., that every object in the domain has a certain property), a universal quantifier is employed.

In the traditional “Quinean” reading of the existential quantifier, two distinct functions are grouped together: (i) to affirm the existence of something, on the one hand, and (ii) to indicate that the entire domain of quantification is not considered, on the other hand. It is preferable to maintain these functions separated. I recommend that a partial quantifier (i.e., an existential quantifier devoid of ontological commitment) be employed to indicate that only a subset of the objects within the domain are being referred to. Then, an existence predicate can be introduced to express existence assertions. By distinguishing these two roles of the quantifier, it is possible to gain expressive resources.

Let us suppose that “∃” is used to denote the partial quantifier and that “E” is used to denote the existential predicate. In this case, we can express the following: $\exists x\,(Fx \wedge \neg \mathrm{E}x)$. This can be interpreted as “some objects have property F and those objects are not real” (i.e. do not exist).

Logical quantification merely establishes a correspondence between individuation and formal coherence,

$$\exists x\, f(x) \leftrightarrow \{x : f(x)\} \neq \emptyset, \tag{4}$$

where $\emptyset = \{x : x \neq x\}$ is the empty set. This means that formal existence implies nothing more than being free of contradictions. If we abstain in mathematics of using the existential predicate “E”, we shall remain free from ontological commitments. When we refer to something in mathematics, we refer to a consistently defined conceptual artifacts. But we are not saying that such artifact exists in the world, independently of the formal system where it is introduced.

4 Formal existence is contextual

Since truths about mathematical artifacts always depend on the corresponding formal context in which they are defined, mathematical truths are analytic and independent of the world (although mathematical statements are not tautologies, as Wittgenstein and his followers once thought). For example, if we introduce an operator $\mathcal{T}^M$ that expresses “the proposition (...x...) is true in the system M”, we can write that

$$(\exists x)\, \mathcal{T}^M(...x...). \tag{5}$$

If M is the theory of integers, an instance of this could be “it is true that there exists an integer less than 4 and greater than 2”. But this does not imply that there is a material object called “3”. This proposition is true in M, not in the world. Existence in a formal systems is contextual, i.e. it is valid only within the system where the formation rules were introduced.

5 Conceptual references are fictional

Fictionalism is a view of the nature of mathematical objects. The central point of the fictionalist approach is to emphasize that mathematical entities are fictional entities. They have attributes similar to those of fictional characters such as Sherlock Holmes or Hamlet. The fictionalist’s proposal is to view mathematical objects as conceptual artifacts. Artifacts of any kind, material or conceptual, are human creations. In the case of conceptual artifacts, they do not actually exist, they do not have causal power, they do not interact with material objects, they are not located in spacetime, and so on.

In other words, they are not real in the sense that they are fictional objects created by the intentional acts of their authors. Thus, they are introduced in a particular context, at a particular time. However, unlike fictional characters in stories, mathematical artifacts are not free creations, but are constrained by strict rules established in the context of a mathematical theory. They are fictions, yes, but of a very special kind: mathematical entities are created when constitutional principles are proposed to describe their place and function in a formal system, and when consequences are drawn from those principles. What they share with fictional entities is that we refer to them as if they were real, assuming that it is understood that we are referring to a formal context in which they are defined. This context is created by mathematicians through the activity of their brains and presented to other people in publications, conferences, and electronic devices.

The mathematical entities thus introduced also depend on (i) the existence of particular copies of the works in which the constituent principles were presented (or memories in particular individuals of those works), and (ii) the existence of a community capable of understanding them. It is correct to say that the mathematics of a particular community has been lost if all copies of its mathematical works have been lost and there is no memory of them. Of course, if other mathematicians reintroduce the same formation rules and adopt the same inference rules, the context and the corresponding artifacts will be recreated so that we can refer to them again. This has happened many times in the history of mathematics. I think, for example, of Pascal's rediscovery of Euclidean geometry, or Heisenberg's rediscovery of matrix algebra.

Thus the mathematical entities introduced by the relevant constitutive principles turn out to be contingent, at least in the sense that they depend on the existence of certain concrete objects in the world, such as human beings and their mathematical works. They do not exist independently of the people who invent them. Fictionalism is a materialist theory of mathematics because it does not postulate abstract entities independent of the human mind.

The fictionalist insists that there is nothing mysterious about how we can refer to mathematical objects and have knowledge about them. Reference to mathematical objects is made possible by works in which the relevant constitutive principles are formulated. In these works the corresponding mathematical objects are introduced. The principles specify the meaning of the mathematical terms as well as the properties of the mathematical objects. In this sense, the constitutive principles provide the context in which we can refer to and describe the mathematical objects in question as if they were real.

Our knowledge of mathematical objects is obtained by examining the attributes of these objects in the context in which they are incorporated, and by drawing consequences from the principles according to which we introduce them into formal systems. It does not require any special intuition about an abstract world.

6 Discussion on objections

The main criticism of the philosophical approach I have presented here has been made by J.-P. Marquis, in his reply to Bunge's version of fictionalism [23, 24]. One of the points raised by Marquis is "What distinguishes mathematical conceptual systems?". He claims that Bunge's characterization of mathematics based on three main requirements [1] can also be applied to, for instance, metaphysics:

> One could argue that there are large parts of philosophy, at least as it is traditionally conceived, that satisfy these three properties. For instance, metaphysics is purely conceptual; philosophers posit and conjecture general patterns and some philosophers try to prove or disprove some of their conjectures. In fact, Bunge's own work in ontology seems to fall under this characterization. I, for one, am far from being satisfied by this enumeration. [23].

[1] "What makes the mathematical study of conceptual systems unique is that (a) it is purely conceptual (i.e. does not make essential use of any empirical data or procedures) and it involves, at some point or other, (b) positing or conjecturing the laws (general patterns) satisfied by the members of those conceptual systems, as well as (c) proving or disproving conclusively some such conjectures." [9]

https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/ ISSN: 3084-7761

EDICIÓN 2025

I do not think that metaphysics is purely formal, as Marquis claims (see [2]), but is informed by the special sciences, such as physics or biology. However, the criticism does not apply to my approach, since I do not claim to characterize mathematics as a family of formal systems from Bunge's desiderata. Rather, I think that what distinguishes mathematics as a formal system from other conceptual constructions or systems is that mathematics is *exact* (in the sense that it is free of vagueness[2]), *consistent* (in the sense that it does not contain contradictions), has both *syntactic* and *semantic rules* for the formation of valid expressions along with inference rules, and never refers to entities supposed to exist independently of the formal system.

Marquis raises a second objection in ref. [23] to the claim that conceptual artifacts are fictions. He states:

> Why is it that mathematical ideas, creations of the human brain, do not have properties linked to this creation? Why don't they have historical properties, reflecting some peculiar socio-historical aspects of the society in which they were created? Or properties of the mathematicians, of their personality? Why don't they have neurophysiological properties? [23]

The answer is that mathematicians construct mathematical systems and theories in this way, from constitutive principles devoid of any reference to historical, personal, cultural, or psychological features. Once the constitutive rules are fixed, the mathematician's work is to determine what follows from them. Since reference is invariant under the operation of deduction, it is irrational to expect historical or psychological aspects to appear in the theorems or definitions of subsequent derivations. Bunge himself is very clear on this point.

> Far from being totally free inventions, mathematical objects are constrained by laws (axioms, definitions, theorems); consequently they cannot behave "out of character" – e.g., there can be no such thing as a triangular circle, whereas even mad Don Quixote is occasionally lucid. [10]

Marquis goes even further, asserting that mathematical constructs are not free creations but are, in fact, conditioned by our cognitive biases, which were formed in our natural and social evolution.

> Indeed, if our numerical and geometrical abilities lie in neurological systems that are independent of language, we can expect that our experience of this knowledge will have a quality that goes beyond language and, in some sense, explicit consciousness. This would account in part for our feeling that mathematics is something that lies beyond and behind our conscious experience, that it is something that we discover. And, indeed, in a very specific sense, we do. [23]

Our cognitive abilities developed by evolution undoubtedly favor brain operations such as counting and grouping. This in turn inspires mathematicians to formulate certain constitutive rules or axioms. Once they are imposed and a system is formed, all discoveries are related to the implications of the rules in the system. It is a simple fact that no mathematical artifact has ever existed independently of a human brain that thought about it. Furthermore, no mathematical artifact has been autonomous or changed of properties (attributes) within that system. Of course, other human beings could explore other systems, obtained from the first one through modifications of the rules. This is evidenced by the development of non-Euclidean geometries from the Euclidean one, and other similar examples.

In a more recent work, Marquis [24] directly challenges Bunge's assertion that mathematical artifacts are mere fictions, existing only in a given formal context but not in reality. If a conceptual object, such as a mathematical artifact, is to be defined within the context of a mathematical system, then the system itself must be considered. Is it real or a mere fiction? We have argued that mathematical systems are formal systems where semantic rules connect conceptual artifacts with symbols of the system. Marquis would argue, perhaps, that some forms of art also do the same. That is true, but

[2] For a formal definition of vagueness, see my book *Scientific Philosophy*, chapter 2 [2].

mathematical systems, contrary to artistic systems, are consistent and exact. In art, interpretation is often ambiguous and consistency is not necessarily a requirement. In fact, much of the expressive power of art is based on such an ambiguity.

Marquis then advocates for a structuralist approach. He boldly asserts that "mathematics is about structures". In his own words:

> For a mathematical theory to be a structuralist theory, it should be possible to prove that the following claim is a metatheorem: given any property P in the given language $\mathcal{L}$ of the theory T, for all objects, of the theory, if $P(X)$ and $X \cong Y$, then $P(Y)$. In words, a theory is a structuralist theory if the provable properties of the theory are only those that are invariant under the proper notion of isomorphism. This says precisely that mathematics is about the properties and relations expressed in the proper language and that the underlying objects merely fill in the places to be filled in the relations of the theory. The specific nature of the objects is totally irrelevant. It is in this sense that mathematical objects are not the central concern and that they are always part of a system [24].

While Marquis does not explicitly state this, it is likely that the symbol $\cong$ represents the concept of "isomorphic to". This structuralism is perhaps a viable approach for abstract algebras, but not for any interpreted mathematical system. Mathematics is concerned with the study of fundamental concepts such as the number 4, the ratio of the circumference of a circle to its diameter (π), the exponential function, and geometrical objects as triangles or spheres. It is not in accordance with the tenets of mathematical practice to downplay the significance of such entities. Conversely, in physics, invariant properties and covariant law statements are the norm. This suggests that physics should be regarded, in Marquis view, as a subfield of mathematics. Nevertheless, the majority of physicists would be reluctant to espouse such a perspective.

7 Conclusions

I have presented a materialist theory of mathematics based on an understanding of mathematics as a family of formal systems that are interpreted only conceptually, in the sense that they refer excessively to conceptual artifacts. These artifacts are human creations, but not completely free creations, since they are subject to strict constitutive rules introduced into the system that make them exact, i.e. free from vagueness. Mathematical objects share with fictional creations the fact that they are creations of the human brain with no independent existence, although, unlike literary fictions, they are necessary within a closed system once the constitutive principles have been made explicit. The main points of this view can be summarized as follows:

(1) Mathematical knowledge: Understanding and thus knowledge of mathematical entities, as well as knowledge of fictional entities in general, is the result of producing adequate descriptions of the objects in question and drawing consequences from the assumptions made to define them.

(2) Reference to mathematical objects: How is reference to mathematical objects accommodated in the fictionalist's approach? The formative principles adopted specify the attributes of the mathematical objects to be introduced. It is possible to refer to the objects in question as those objects that have the corresponding attributes. Mathematical reference is always contextual: it is made in the context of the constitutive principles that give meaning to the relevant mathematical terms.

(3) Application of mathematics: For the fictionalist, the application of mathematics to reality is a matter of using the expressive resources of mathematical theories to accommodate various aspects of scientific discourse. The only requirement is that the mathematical theory be coherent, that is, free of contradictions. Thus, the criterion of truth in mathematics is internal coherence.

To conclude: Mathematics can be understood as the study and development of fictitiously interpreted formal systems that are closed by deduction. These systems are not purely syntactic like logistic systems. They are interpreted, but their reference class consists of exact conceptual artifacts. They are mental constructs produced by human beings that exist only in the context of a given formalism into which they are introduced. Therefore, mathematics has no ontological import. The referents of mathematics cannot exist independently of the human brain.

EDICIÓN 2025

References

[1] Colyvan, M. The Indispensability of Mathematics. New York: Oxford University Press, 2001.

[2] Romero, G.E., *Scientific Philosophy*. Cham, Switzerland: Springer, 2018. .

[3] Balaguer, M. *Platonism and anti-platonism in mathematics.* New York: Oxford University, 1998. Press.

[4] Goodman, N., & Quine, W.V.O *Steps toward a constructive nominalism.* Journal of Symbolic Logic, 1947, 12, 105-122.

[5] Field, H. *Science Without Numbers: A Defense of Nominalism.* Oxford: Blackwell, 1980.

[6] Burgess, J., & Rosen, G. *A Subject with no Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics.* Oxford: Clarendon Press, 1997.

[7] Casado, C.M.M. *Materialism, Logic, and Mathematics.* In: Romero, G.E., Pérez-Jara, J., Camprubí, L. (eds) *Contemporary Materialism: Its Ontology and Epistemology*. Synthese Library, vol 447. Springer, Cham, 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-030-89488-7$_9$

[8] Vaihinger, H. *Die Philosophie des Als Ob.* Berlin: Verlag von Reuther & Reichard,1911. Published in English as *The Philosophy of 'As If',* translated by C.K. Ogden, London: Kegan Paul, 1923.

[9] Bunge, M. *Treatise on Basic Philosophy. Vol. 7. Epistemology and Methodology III: Philosophy of Science and Technology. Part I: Formal and Physical Sciences.* Dordrecht: Kluwer, 1985.

[10] Bunge, M. *Moderate mathematical fictionism.* In: E. Agazzi & G. Darvas (eds.), *Philosophy of mathematics today*, 51–71, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[11] Curry, H. B. *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics.* Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1951.

[12] Bueno, O. *Mathematical fictionalism.* In: O. Bueno and O. Linnebo(eds.), *New Waves in Philosophy of Mathematics*, 59–79, Basingstoke: Palgrave Macmillan, 2009.

[13] Woods, J. *The Logic of Fiction.* London: College Publications, 2009.

[14] Romero, G.E., *Systemic Materialism* . In: Romero, G.E., Pérez Jara, J, Camprubí, L. (eds.) *Contemporary Materialism: Its Ontology and Epistemology*, Synthese Library, vol 447. Cham: Springer, 2022. .

[15] Weir, A.. *Truth through Proof: A Formalist Foundation of Mathematics.* Oxford: Clarendon Press, 2010.

[16] Quine, Willard Van Orman, *Word and Object.* Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1960.

[17] Quine, Willard Van Orman, *Ontological Relativity and Other Essays.* New York: Columbia University Press, 1969.

[18] Torretti, R. *Three kinds of mathematical fictionalism.* In: J. Agassi & R.S. Cohen (eds.), *Scientific Philosophy Today: Essays in Honor of Mario Bunge* (pp. 399–414). Dordrecht: D. Reidel Press, 1982.

[19] Russell, Bertrand, *The Principles of Mathematics.* 2d. ed. Reprint, New York: W. W. Norton & Company, 1996. (First published in 1903.)

[20] Bunge, M. *Treatise on Basic Philosophy. Vol. 1: Sense and Reference*. Dordrecht: Kluwer, 1974a

[21] Bunge, M. *Treatise on Basic Philosophy. Vol. 2: Interpretation and Truth.* Dordrecht: Kluwer, 1974b.

[22] Quine, Willard Van Orman, *On What There Is.* Review of Metaphysics 1948; 2 (5):21-38.

[23] Marquis, J.P. *Mario Bunge's philosophy of mathematics: An appraisal.* Science & Education 2012; 21(10):1567–1594.

[24] Marquis, J.P. *Bunge's mathematical structuralism is not a fiction.* In: M.R. Matthews (ed.) *Mario Bunge: A Centenary Festschrift*, 587–608. New York: Springer, 2019.

FILOSOFÍA, HISTORIA Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA THEOREM
https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/
ISSN: 3084-7761
Año 2025 - Nº003

La muerte de Hipaso y el dodecaedro

Douglas Jiménez
UNEXPO. Vicerrectorado de Barquisimeto
dougjim@gmail.com
Barquisimeto. Venezuela

Resumen

Dentro de los tantos mitos que rodean al pitagorismo, uno de ellos destaca como un crimen: el asesinato de Hipaso ahogado en el mar. Dentro de los motivos aducidos para tan indigno acto aparece la revelación de los misterios del dodecaedro. En este ensayo analizaremos algunos de los documentos históricos que dieron pie al mito y también mostraremos de manera rigurosa cuáles son los supuestos misterios del dodecaedro, el sólido platónico magno.

1. Reseña de un supuesto crimen intelectual

En la abundante biografía de Pitágoras escrita por Iámblico y recogida en la famosa compilación de Guthrie ([4], pág. 79), se lee:[1]

> *Como Hipaso que, a pesar de ser reconocido como un pitagórico, encontró sin embargo en el mar la ruina de los impíos, como consecuencia de haber divulgado y enseñado el método de encerrar doce pentágonos en una esfera, método cuyo descubrimiento se le atribuía. No obstante, como todo conocimiento de geometría, era producto de la mente de* ***el hombre****, que era la frase usada para referirse a Pitágoras.*

La cita habla de una ejecución: *encontró en el mar la ruina de los impíos.* Lo que no parece muy claro es el supuesto delito que la provocó. ¿Se le reclamaba a Hipaso de Metaponto la divulgación de un secreto sectario? ¿O se le juzgó por acreditarse un conocimiento que la secta atribuía a su jefe y máximo exponente? En cualquiera de los dos casos, el castigo se ve harto excesivo, pero en la historia del mundo el sectarismo ha dado para eso y para cosas más terribles aún.

La crudeza del hecho da incluso para pensar en alguna exageración con fines de moraleja, pero el pitagorismo ha sido históricamente una fuente de misterios, derivados todos de una evidente falta de material escrito contemporáneo con los protagonistas, producido por ellos mismos, aún cuando Diógenes Laercio niega la supuesta carencia de tales materiales por falta de producción del jefe de la escuela, a quien le atribuye, al menos nueve obras. Otras, según la misma fuente, eran de autores distintos que firmaron usurpando el nombre de Pitágoras, entre ellos el mismo Hipaso, con supuestos fines de descrédito.[2]

Todo esto pareciera hablar de cierta inquina alrededor de la persona de Hipaso y, quizás, hasta de alguna rivalidad del destacado alumno con su celoso maestro. Desaveniencia que, en la nube histórica que ha empañado la mirada hacia el pitagorismo, hace aparecer al metapontino como creador o divulgador indistintamente de la (también supuesta) crisis de los inconmensurables tanto como del tema que nos ocupa relacionado con el dodecaedro, es decir *el método de encerrar doce pentágonos en una esfera*, al que se refiere Iámblico en la cita anterior. Nuestra fuente para esta afirmación es el mismo Iámblico, ya que en [4], pág. 116 leemos que la divulgación, a personas indignas, del secreto

[1] La traducción del inglés es nuestra. Con otra redacción, la cita se consigue también en Heath, ([5], vol. 1, pág. 160).
[2] Al respecto se puede consultar a Diógenes Laercio: [1], vol. II, pág. 102 o [4], pág. 142.

de las magnitudes conmensurables e inconmensurables traía para el infractor un castigo moral (simbólico, según Guthrie) en la forma de la construcción de una tumba, como si ya hubiera muerto. A continuación, Iámblico retorna a la persona de Hipaso y rememora el dodecaedro y el castigo, no tan simbólico, del ahogamiento que, según él, fue ordenado por el propio Poder Divino. No obstante, al final del párrafo comparte la duda de si el castigo tuvo que ver más bien con los inconmensurables.

Lo único claro de todo esto es que hay confusión, pero la confusión parece inherente al legado pitagórico al punto de que Platón, admirador decidido de Pitágoras y sus aportes, lo menciona por su nombre en múltiples párrafos agradecidos; no obstante Aristóteles, alumno destacado y crítico de Platón, usa "los pitagóricos" para referir la fuente de dichos aportes, ignorando por completo el nombre propio, a pesar de la frecuencia con la que recurre a ellos, en libros como *Física* o *Metafísica*.

Con confusión o sin ella, lo que la tradición ha dado en llamar *legado pitagórico* tiene resultados muy concretos que mantienen importancia y algunos vigencia. Podemos nombrar:

- los fundamentos de la *teoría de números*, entendiendo como tal las propiedades de los números naturales, con la creación de conceptos como *múltiplos*, *divisores*, *paridad*, *primos* y otros relacionados;
- la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo alcanza un ángulo llano;
- el conocido *teorema de Pitágoras*, relativo a los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo, aunque puede extenderse a cualquier otra clase de figuras distintas a los cuadrados;
- los *problemas de aplicación de áreas*, expresables hoy mediante identidades y ecuaciones polinomiales de segundo grado;
- las *magnitudes conmensurables e inconmensurables*, germen de los actuales conceptos de número racional e irracional;
- el descubrimiento del hoy llamado *número de oro*, que en los *Elementos* de Euclides se identifica como *división en extrema y media razón*;
- el estudio de las figuras tridimensionales de caras poligonales congruentes, hoy conocidas como *sólidos platónicos* que, según Proclo[3], fue el *leit motiv* de los *Elementos* de Euclides.

En la enumeración hemos nombrado varias veces los *Elementos* de Euclides, puesto que en este texto histórico del siglo III a. C. aparecen todos estos resultados dispersos a lo largo de sus trece volúmenes. De hecho, los sólidos platónicos cierran la obra, mostrándonos el autor los procedimientos de construcción de dichos sólidos, así como la demostración de que solo puede haber cinco de tal naturaleza.

Los aspectos de la lista anterior no están aislados entre sí, existen íntimas conexiones entre ellos, pero los tres últimos son los que definen el embrollo del asesinato de Hipaso. Como móviles del crimen se suele identificar (ya nos lo mostró Iámblico) a los inconmensurables y al dodecaedro. Ahora bien, la inconmensurabilidad abarcó en principio a la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado, problema que en la actualidad conocemos asociado al número irracional $\sqrt{2}$. El cuadrado fue objeto predilecto de estudio para los pitagóricos, aunque posiblemente no lo fue tanto como el pentágono regular que oculta en él una relación altamente valorada, llamada por Euclides la división en extrema y media razón y rebautizada por la posteridad como razón áurea. También para el pentágono la razón diagonal–lado se mostró inconmensurable y el número que hoy la identifica se conoce, como es natural, con el calificativo de número áureo y resulta ser

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pues bien, el pentágono es la fuente del número de oro y el dodecaedro está hecho de doce pentágonos. Lo que ganó el nombre de *platónicos* para los poliedros regulares es la descripción de los mismos

[3]Ver [7] pág. 57.

ISSN: 3084-7761

que hiciera Platón en su diálogo *Timeo o de la Naturaleza*, para lo cual puso tal descripción en la boca del personaje Timeo. El matemático actual se siente desconcertado y desilusionado con esta descripción, pues se trata de una artificiosa composición de triángulos rectángulos, unos isorrectángulos $(45° - 90° - 45°)$ y otros mitad de un equilátero $(30° - 90° - 60°)$. Pero esta composición particular solo le sirve para cuatro de los cinco sólidos (tetraedro, hexaedro, octaedro e icosaedro), que están hechos de caras triangulares o cuadradas. Según la cosmogonía de Timeo eran la forma de los átomos de los elementos reconocidos hasta ese momento: fuego, tierra, aire y agua.

¿Qué queda entonces para el quinto sólido, ese que no puede componerse con los triángulos descritos en el párrafo que acabamos de terminar, dado que los pentágonos no los acogen? Pues... nada más y nada menos que ser la representación del plano con el cual el mismísimo Dios construyó el Universo. Así termina Timeo su exposición de los cinco sólidos, tal como puede verse en [6], págs. 690-691.

Como ya hemos dicho, los *Elementos* de Euclides concluyen en la construcción de los sólidos platónicos, pero con una rigurosidad matemática que está bastante alejada de la farragosa descripción de ellos en el *Timeo*, lo que lleva a la pregunta acerca de cuál era el proceder pitágorico frente a estos sólidos: ¿el fárrago de Timeo o la rigurosidad de Euclides? En esta última el papel que juega el número de oro en las demostraciones es central para dos de las figuras: el icosaedro y el dodecaedro. La diferencia que vale la pena destacar entre ambos, a los efectos de nuestro tema, es que para el icosaedro el pentágono es un elemento auxiliar de construcción mientras que en el dodecaedro es esencial, puesto que sus caras son pentagonales.

Si el asesinato de Hipaso fuera más allá del mito y pudiera adquirir estatus de verdad histórica, deberíamos abrigar pocas dudas de que la erudición euclidiana al respecto llegó directamente del pitagorismo. Para una secta con pretensiones místicas, con conciencia de saber privilegiado y visión aristocrática derivada de ese saber todos los ingredientes que conformarían el misterio estaban a la mano: la presencia del pentágono y la estrella que formaban sus diagonales, que llegó a ser símbolo de la propia escuela y recibió el nombre particular de *Salud*; la razón áurea que aparecía en el corte de esas diagonales; el hecho indeseado de que tal razón fuera una razón entre inconmensurables; el uso privilegiado de ella misma para construir el dodecaedro; la consideración especial del dodecaedro en la cosmogonía universal. Si Hipaso fue un inspirado antecesor de la divulgación científica no supo calibrar el contenido de herejía de su particular intento, en caso contrario fue un valiente racionalista con una visión democrática harto riesgosa para su integridad personal.

Lo cierto es que poco menos de tres siglos después, todo el fardo místico que pretendió embadurnar de ocultismo unos conocimientos poderosos ya había sido desechado. La obra de Euclides -sus *Elementos* y unos cuantos títulos más que conocemos aunque no hayamos tenido acceso a sus contenidos- nos presenta lo esencial del pitagorismo en su estructura netamente racional, tanto así que el alejandrino lo metamorfosea en un sistema de pensamiento que se convirtió en modelo para la matemática posterior pero, muy particularmente, para la de los siglos XIX y XX.

En los *Elementos* de Euclides los historiadores de la matemática han reconocido la influencia pitagórica, dentro de una tradición de respeto al conocimiento racional que pasa por una gran cantidad de pensadores cuyos nombres no son populares pero que giran como planetas alrededor de ese par de soles que fueron Platón y Aristóteles para el pensamiento universal. Posiblemente Hipaso fue el antecesor de Arquitas, Hipócrates y Eudoxo, quienes buscaron las piedras con las que Euclides, Arquímedes y Apolonio construirían el enorme edificio del cual fueron delicados arquitectos.

En lo que sigue trataremos de describir el tránsito que llevó a una de esas piedras a ser parte de una destacada habitación del edificio. El número de oro es la gema más valiosa de la orfebrería que significó la teoría de los poliedros regulares, vale decir, de los sólidos platónicos. En el conjunto de ellos destaca el dodecaedro con sus doce caras pentagonales, el sólido que supuestamente fue el *leit motiv* del sacrificio de Hipaso. Mostraremos un camino lógico, desprovisto de connotaciones mágicas, que en la obra euclidiana va desde este número hasta el sólido. Pero, salvo al describir el propio dodecaedro, dejaremos los detalles técnicos al escarbador que quiera inmiscuirse en las páginas del alejandrino.

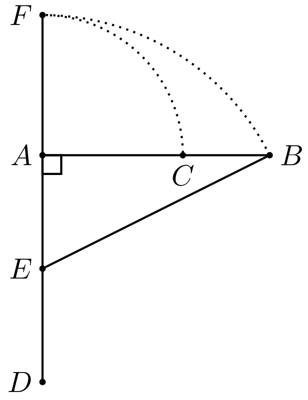


Figura 1: Separación áurea con regla y compás

2. Las pautas del camino

En el momento en que aparece la división en extrema y media razón -es decir la razón áurea- por primera vez en los *Elementos*[4] ni siquiera podía el autor usar ese nombre. La estructura teórica de esta obra es rigurosa y la palabra *razón* tiene un significado muy específico, que será develado al lector apenas en el quinto de los libros. Sin embargo, al final del libro II, específicamente en la proposición 11 (proposición II.11) se describe un método para separar un segmento cualquiera en dos partes desiguales, de manera que el cuadrado construido sobre la parte mayor del corte tenga la misma área que el rectángulo cuyos lados son el segmento completo y la parte menor del corte. El procedimiento de dibujo, mostrado en la figura 1, sigue la siguiente pauta:

1. Se traza el segmento $\overline{AB}$, que será el objeto de la separación propuesta.
2. Se gira el segmento perpendicularmente con centro A para obtener $\overline{AD}$.
3. Se marca E, el punto medio de $\overline{AD}$.
4. Se marca F en $\overrightarrow{EA}$ tal que $EF = EB$.
5. Se marca C en $\overline{AB}$ tal que $AC = AF$.

El lector moderno no tendrá mayor dificultad en verificar que la construcción anterior lleva a la ecuación

$$AC^2 = (AB)(BC)$$

que es la formulación aritmética de la propuesta geométrica original euclidiana. Sin embargo, la expresión

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC},$$

para nosotros derivada inmediatamente de la anterior, estaba vedada por razones teóricas a Euclides. Pero es esta última igualdad la que define a la razón áurea: *el segmento total es a la parte mayor del corte como dicha parte mayor es a la menor.*

El libro IV está destinado, entre otras proposiciones auxiliares, a la construcción de algunos polígonos regulares -inscritos y circunscritos- a círculos dados: el cuadrado, el pentágono, el hexágono y el pentadecágono. Dado nuestro objetivo manifiesto debemos detenernos en el pentágono. Para construirlo Euclides necesita un triángulo auxiliar: un isósceles cuyos ángulos de la base sean dobles del tercer ángulo. En nuestros términos está claro que se trata de un ángulo de $36° - 72° - 72°$. Para la construcción de tal ángulo es necesaria la división áurea aprendida en la proposición II.11 y esto lo muestra Euclides en la proposición IV.10 para, de inmediato en la IV.11, construir el pentágono regular inscrito, tal como se muestra en la figura 2, en la que primero inscribimos dentro del círculo dado el

[4] Las alusiones al contenido de los *Elementos* se pueden verificar en las referencias [2] y [3].

EDICIÓN 2025
https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/ ISSN: 3084-7761

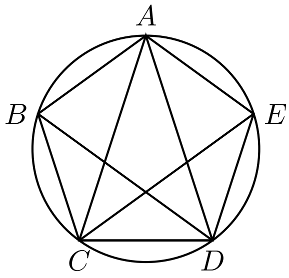


Figura 2: Construcción de un pentágono inscrito.

$\triangle ACD$ de $36° - 72° - 72°$ que ya sabemos construir.[5] Ese paso nos da tres puntos del pentágono (A, C y D); los otros dos (B y E) los obtenemos en la circunferencia intersectándola con las bisectrices de los ángulos en C y D.[6]

El concepto de *razón*, imprescindible para la construcción de la matemática griega, entra en escena en el quinto libro. No aspiramos al espacio de este artículo para explicar su complejidad, pero le sirvió a los griegos para resolver los problemas asociados a su desconocimiento del número real. En todo caso, ya una vez armado con ese concepto, Euclides puede proceder a definir la división en extrema y media razón -nuestra razón áurea- la cual presenta como la tercera definición del sexto libro en los términos que ya hemos comentado: un segmento de extremos A y B está dividido en extrema y media razón por un punto C si la razón entre el segmento total y la parte mayor del corte es la misma que la existente entre dicha parte mayor y la parte menor. En términos actuales sería

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB},$$

entendiendo que la parte mayor del corte va de A a C. Nuestra expresión es completamente numérica: para Euclides se trataba de una comparación de segmentos.

En el mismo libro VI, Euclides nos muestra un procedimiento para dividir un segmento dado en forma áurea pero, sorprendentemente, no apela al mismo procedimiento que nos enseñó en la proposición II.11. Más bien adorna su faena usando una técnica de construcción de paralelogramos,[7] que hoy interpretamos como un estudio de las soluciones de ciertas ecuaciones de segundo grado. Técnica que, en las manos de Apolonio, nos dio las definiciones de las secciones cónicas de una forma bastante similar a como las conocemos hoy.

De aquí en adelante no nos topamos con la razón áurea sino hasta el libro XIII, el último de la serie, donde el alejandrino construye con rigor detallista cada uno de los sólidos platónicos. Previo a ello, el libro contiene alguna teoría faltante y necesaria sobre el número de oro. Haremos sección aparte para el comentario debido.

3. El número de oro en el libro XIII

Salvo por un factor positivo, todo segmento separado en razón áurea puede mirarse como en la figura 3, en la que

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Esa observación es útil para hacer un álgebra de φ. Por ejemplo, de

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

[5]Previamente Euclides nos ha enseñado a inscribir en un círculo dado triángulos semejantes a otros.

[6]El dibujo contiene cuatro diagonales del pentágono. Si dibujáramos la quinta, es decir $\overline{BE}$, veríamos la estrella de cinco puntas que era el signo de la hermandad pitagórica; había un nombre para ella en la congregación: *Salud*.

[7]Los llamados *problemas de aplicación de áreas*.

ISSN: 3084-7761

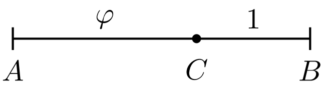


Figura 3: La separación áurea en general

obtenemos

$$\frac{\varphi+1}{\varphi}=\frac{\varphi}{1}$$

además de dos importantes ecuaciones de caracterización aritmética:

$$\varphi^2=\varphi+1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\varphi}=\varphi-1$$

las cuales nos dicen que φ es el único número positivo cuyo cuadrado se obtiene al sumarle 1 y su inverso al restarle 1. No creemos que pueda suponerse que alguna de estas visiones (llamémoslas aritméticas o algebraicas) pasaran por la mente de Euclides. El profano haría mal esperando encontrarse con ellas en el texto de los *Elementos*; en su lugar verá bellos razonamientos sobre figuras.

El libro XIII comienza con seis proposiciones cuya visión se nos simplifica hoy aprovechando la aritmética que define el párrafo anterior. Por ejemplo, XIII.1 afirma que en la separación áurea el cuadrado construido sobre la adición del segmento mayor a la mitad del total quintuplica en área al cuadrado construido precisamente sobre la mitad del total. Usando la aritmética del párrafo anterior, la afirmación

$$\left(AC+\frac{AB}{2}\right)^2=5\left(\frac{AB}{2}^2,\right)$$

se traduce en la siguiente identidad

$$\left(\varphi+\frac{\varphi+1}{2}\right)^2=5\left(\frac{\varphi+1}{2}\right)^2,$$

que no debe ser de difícil verificación al lector.

De mucha utilidad en la construcción de los sólidos es también XIII.4, que nos dice que el corte áureo hace que los cuadrados construidos, uno con el segmento completo y otro con la parte menor de la separación triplican juntos en área al construido con el segmento mayor, esto es

$$AB^2+BC^2=3AC^2$$

o, aritméticamente

$$(\varphi+1)^2+1=3\varphi^2.$$

Es en el libro XIII que Euclides nos muestra, en la proposición 8, que las diagonales del pentágono se cortan en razón áurea y la parte mayor del corte es igual al lado del pentágono. Algunas proposiciones siguientes a esta establecen relaciones métricas entre los lados de los polígonos regulares inscritos dentro del círculo. Por ejemplo, la proposición 9 dice que los lados de hexágono y decágono están en relación áurea, mientras que la proposición 10 nos informa que los lados de decágono, hexágono y pentágono dispuestos en triángulo forman un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el lado del pentágono. Finalmente, antes de entrar a la construcción de los sólidos, se nos hace saber en la proposición 12 que el cuadrado construido con el lado del triángulo equilatero triplica en área al cuadrado construido con el lado del hexágono que, por otra parte, es igual al radio del círculo.[8]

Las proposiciones 13 a 17 muestran con riqueza de detalles la construcción de los cinco sólidos platónicos. El plan de Euclides es similar para todas las demostraciones. Primero fija el diámetro de la esfera donde se inscribirá el sólido; con esa dimensión define un procedimiento para construir las caras del poliedro; demuestra que ese procedimiento produce caras congruentes y vértices situados sobre la esfera dada; finalmente compara las longitudes de las aristas del sólido con el radio de la esfera.

[8]Todos estos resultados son muy útiles en la compleja construcción del icosaedro, realizada en la proposición XIII.16.

A pesar de lo fino del razonamiento, los dibujos euclidianos, totalmente carentes de perspectiva, dificultan la lectura de las demostraciones. Con el objeto de suavizar un poco esta dificultad, las hemos rediseñado en tres dimensiones apoyándonos con la aplicación Geogebra, menteniendo intacto (salvo uno que otro detalle menor) el razonamiento euclidiano. Las hemos puesto en la red en las siguientes direcciones:

Tetraedro: `https://www.geogebra.org/m/xb3eykhw`

Octaedro: `https://www.geogebra.org/m/dhvtnekn`

Hexaedro: `https://www.geogebra.org/m/v6nfzckx`

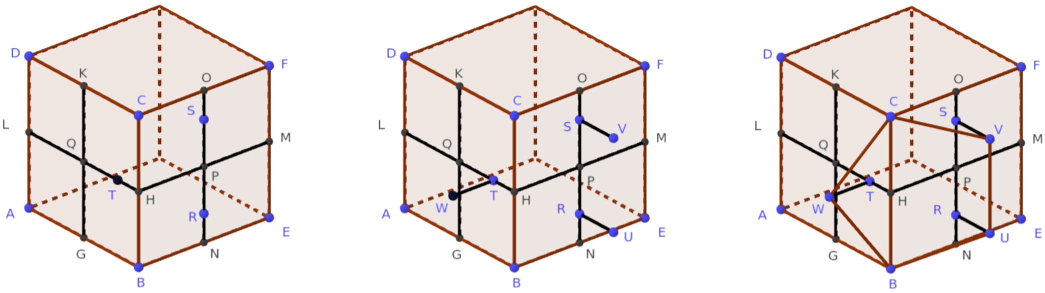
Icosaedro: `https://www.geogebra.org/m/ebhyey29`

Dodecaedro: `https://www.geogebra.org/m/yup9bptz`

Dedicaremos la sección final de este ensayo a la construcción del dodecaedro, usando los dibujos obtenidos de la presentación Geogebra anterior. No entraremos en la consideración métrica, pues esta nos introduciría en terrenos difíciles de los Elementos que podemos dejar para un ensayo posterior.

4. Los secretos del dodecaedro

Expondremos a continuación, con el detalle que nos provee Euclides, la construcción del dodecaedro. La lectura de esta sección nos exigirá algo de ejercicio matemático concentrado. El lector que tenga a su mano una buena versión de los *Elementos* disfrutará de una visión que el autor alejandrino no pudo dar, porque estaba ocupado en preparar las pautas civilizatorias que nos llevarían a esa visión moderna, así que guardemos los juicios duros en el maletín de la prudencia. El razonamiento que leeremos -que también podemos conseguir en el enlace que dimos en la sección anterior- es el mismo de Euclides y la notación que usaremos para identificar los puntos de la figura es la que encontramos en Heath ([2], vol. III, págs. 493-498). La razón de la selección es que se trata de caracteres latinos que (a nuestro juicio) hacen más fácil seguir el razonamiento. Otras versiones usan letras griegas.

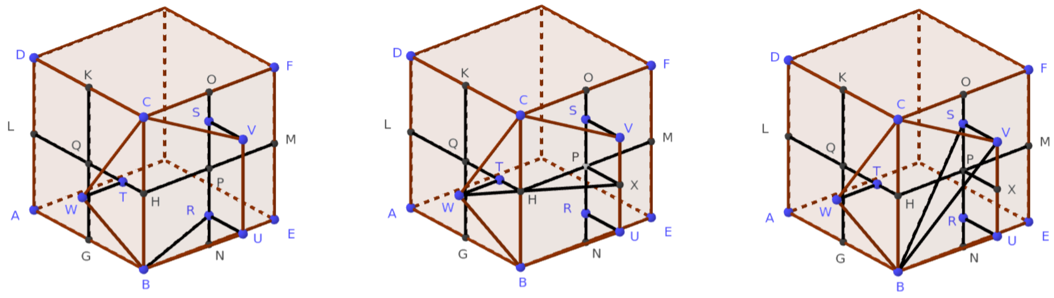


(a) (b) (c)

Figura 4: Construcción del dodecaedro: las caras

Todo comienza, tal como vemos en la figura 4, con el cubo ya construido en la proposición XIII.15 el cual, soportará cada cara del dodecaedro en una de sus doce aristas. La parte (a) de la figura muestra el cubo y las caras $ABCD$ y $BCFE$ que se intersectan en la arista $\overline{BC}$, que será el soporte del pentágono. ¿De qué manera? Las caras comentadas las hemos separado cada una en cuatro cuadrantes que emanan de los centros P y Q de las propias caras. H, L, K, G, M, N, O son puntos medios de las aristas sobre las que se ven en el dibujo. Los segmentos $\overline{PN}$, $\overline{PO}$ y $\overline{QH}$ se separan de manera áurea por los puntos respectivos R, S y T, de forma que la parte mayor de la separación contenga el punto central de la cara (P o Q).

A continuación, como muestra la parte (b) de la figura, se levantan segmentos perpendiculares desde los puntos de separación hacia fuera del cubo, todos iguales a la parte mayor de la división áurea realizada. Identificamos como U, V, y W los extremos de estos segmentos. Tenemos entonces cinco puntos U, B, W, C y V que unimos en pentágono, tal como se indica en la parte (c) de la figura 4. ¿Se trata de un pentágono regular?



(d) (e) (f)

Figura 5: Construcción del dodecaedro: la métrica

Para demostrar que sí, Euclides necesita tres cosas: (1) que sus lados sean congruentes (equilateralidad), (2) que los cinco vértices estén en un mismo plano (coplanaridad) y (3) que los cinco ángulos internos sean congruentes (equiangularidad). Las tres partes de la figura 5 nos ayudarán a dar las respuestas respectivas.

Para llegar a la equilateralidad, la parte (d) muestra el trazo del segmento $\overline{RB}$. Como R corta a $\overline{PN}$ en forma áurea, la proposición XIII.4 asegura que $PN^2 + RN^{"} = 3PR^2$. Pero $PN = NB$ y $PR = RU$, por lo cual $NB^2 + NR^2 = 3RU^2$. Por otra parte, el teorema de Pitágoras dice que $NB^2 + NR^2 = BR^2$, lo que conduce a que $BR^2 + RU^2 = 4RU^2$. También es cierto que $\triangle BRU$ es rectángulo en R, por lo que $BR^2 + RU^2 = BU^2$ y entonces $BU^2 = 4RU^2$, o mejor $BU = 2RU$. Pero también $VU = SR = 2PR = 2RU$, lo que trae como consecuencia $VU = BU$: dos lados del pentágono son iguales. Razonamientos similares, apoyados en S y T demuestran que los cinco lados son iguales.

La demostración de la coplanaridad de los vértices (parte (e) de la figura 5) arranca desde la consideración de X, el punto medio de $\overline{UV}$, sobre el cual construimos el $\overline{PX}$, paralelo y de igual longitud a $\overline{RU}$ y $\overline{SV}$. Tracemos los segmentos $\overline{XH}$ y $\overline{HW}$. Como T es punto de división áurea de $\overline{QH}$ entonces

$$\frac{QH}{QT} = \frac{QT}{TH}.$$

Pero $HQ = HP$ y $QT = TW = PX$, por lo cual

$$\frac{HP}{PX} = \frac{TW}{TH} \quad \text{y} \quad \overline{PX} \parallel \overline{TH}, \overline{HP} \parallel \overline{TW},$$

implican que $\triangle XPH \sim \triangle HTW$, lo que lleva a paralelismo y consiguiente colinealidad de $\overline{XH}$ y $\overline{HW}$, lo que es suficiente para demostrar la coplanaridad que procuramos.

Demostraremos ahora la equiangularidad, apoyados en la parte (f) de la figura 5, para ello tracemos los segmentos $\overline{SB}$ y $\overline{VB}$. Por construcción, $\overline{PN}$ está cortado en razón áurea por R ($PR > RN$) y $PR = PS$, por lo tanto, según la proposición XIII.5, $\overline{NS}$ está cortado en razón áurea por P ($NP > PS$); entonces

$$NS^2 + SP^2 = 3NP^2.$$

Pero $NP = NB$ y $PS = SV$, de donde

$$NS^2 + SV^2 = 3NB^2.$$

Sumando NB^2 a ambos lados de esta igualdad tenemos

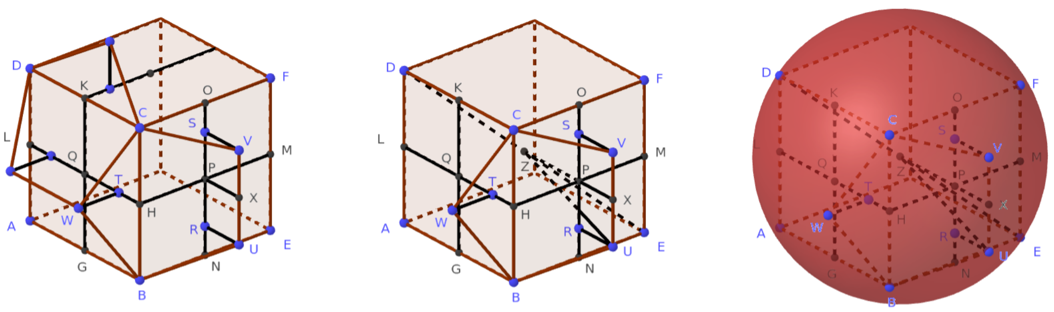
$$SV^2 + (NS^2 + NB^2) = 4NB^2,$$

EDICIÓN 2025

por lo que, aplicando el teorema de Pitágoras al $\triangle SNB$,

$$SV^2 + SB^2 = 4NB^2,$$

y aplicándolo de nuevo sobre el $\triangle VSB$ esta última igualdad no es otra cosa que $VB^2 = 4NB^2$ o, mejor todavía, $VB = 2NB$. Pero $BC = 2BN$, lo que implica que $BC = BV$ y, por el criterio LLL, $\triangle BCW \cong \triangle BVU$, lo que garantiza la igualdad de los ángulos del pentágono en los vértices W y U. El razonamiento se puede repetir usando R en vez de S, y se obtiene la igualdad de los ángulos en los vértices V y W. Con estos tres vértices basta para garantizar la igualdad de los dos ángulos restantes.[9]



(g) (h) (i)

Figura 6: Construcción del dodecaedro: la esfera

Llegado a este punto, Euclides da por hecha la construcción del dodecaedro, puesto que el cubo tiene doce aristas. Nosotros pensamos que, para convencernos de la conexión entre las caras del sólido, no es mala idea dibujar una cara adicional sobre la arista $\overline{DC}$ perpendicular a $\overline{BC}$, la que acaba de servirnos de soporte. La parte (g) de la figura 6 muestra la construcción, usando dos segmentos auxiliares adicionales que salen perpendicularmente de las caras del cubo. Pero aún queda pendiente la tarea de demostrar que los nuevos vértices están sobre la misma esfera en la que está inscrito el cubo. Para ello necesitaremos la parte (h) de la figura 6.

En esa ilustración vemos que se trazó la diagonal $\overline{DE}$ en el cubo ($\overline{DE}$ es un diámetro de la esfera de circunscripción) y que se prolongó $\overline{XP}$ por P hasta el punto Z donde se consigue con la diagonal. El punto Z es el centro de la esfera que circunscribe al cubo.[10] Tracemos además $\overline{UZ}$, que nos mostrará el $\triangle UXZ$, rectángulo en X. Si partimos de

$$NS^2 + SP^2 = 3NP^2$$

y de que $NS = XZ$, $XP = PS = XU = RP$, llegamos a

$$ZX^2 + XU^2 = 3NP^2,$$

pero

$$UZ^2 = ZX^2 + XU^2,$$

por lo cual $UZ^2 = 3NP^2$. Además[11] $ZE^2 = 3NP^2$, lo que lleva directamente a $UZ = ZE$, garantizando así que U está sobre la esfera. El razonamiento se hace de manera similar con V y W, lo que completa la demostración. La parte (i) de la figura 6 muestra la situación completa.

[9]Lo demostró Euclides en la proposición XIII.7.

[10]La demostración de esa intersección la conseguimos en los *Elementos* en la proposición XI.38.

[11]Igualdad demostrada en la construcción del cubo (Prop. XIII.15). Recordemos que Euclides termina las demostraciones consiguiendo relaciones métricas entre la arista de los poliedros y el radio de la esfera de circunscripción.

EDICIÓN 2025

https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/ ISSN: 3084-7761

5. Conclusión

No estamos seguros: no sabemos si Hipaso conocía lo que acabamos de leer con el detalle con el que lo vimos en la sección anterior. La construcción es de una belleza fascinante que invita a reflexionar sobre el sentido de ocultarla para favor de algunos privilegiados. Pero tampoco podemos ser muy duros en nuestro juicio: los seres humanos somos producto de nuestra época y es por la valentía de hombres como Hipaso que los prejuicios pueden quedar como figuras de desecho o lastre para la posteridad. No sabemos todo lo que los siglos por venir reclamarán a la era en que vivimos pero, con certeza, no quedaremos impunes. Aplaudamos entonces la dinámica de la Historia y la obra del Hombre que la construye.

Referencias

[1] Diógenes Laercio, *Vidas de los más ilustres filósofos griegos. (Dos volúmenes).* Colección Biblioteca de Filosofía, Ediciones Folio, S. A., 2002.

[2] Euclid, *The thirteen books of the Elements.* (3 vols.) (Traducción, introducción y comentarios de Sir Thomas Heath.) Dover Publications, Inc. Nueva York, 1956.

[3] Euclides, *Elementos.* (3 vols.) (Introducción de Luis Vega. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaño.) Editorial Gredos. Madrid, 1991.

[4] Guthrie, Kenneth Sylvan, *The pythagorean sourcebook and library (Compilation and translation).* Alexandria books, Phanes Press, 1987, 1988.

[5] Heath, Thomas, *A history of greek mathematics (Two volumes)*, Dover Publications, Inc, 1981.

[6] Platón, *Diálogos (Estudio preliminar de Francisco Larroyo).*, Colección "Sepan cuántos…". Editorial Porrúa, 1996.

[7] Proclus, *A commentary on the first book of Euclid* Elements. (Translated with Introduction and notes, by Glenn R. Morrow.) Princeton University Press. New Jersey. 1970.

ISSN: 3084-7761

FILOSOFÍA, HISTORIA Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA THEOREM
https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/
ISSN: 3084-7761
Año 2025 - Nº004

El número fregeano; ¿un concepto elemental?

José Luis Guevara Rodríguez
Universidad Nacional de Colombia
joguevarar@unal.edu.co
Bogotá
Harol Esteban Rodríguez
Universidad Pedagógica Nacional
herodriguezd@upn.edu.co
Bogotá

Resumen

Este artículo tiene como objetivo exponer que las ideas expuestas en los *Fundamentos de la Aritmética* de Frege no son tan elementales como se podría esperar del nombre del libro. En dicho documento, aparecen discusiones fundamentales que plantea Frege al reconocer que en su época no es muy claro lo que se entiende por número. Además, expone varias definiciones y/o opiniones de filósofos como Kant y matemáticos como Leibniz. A partir de dichas opiniones y de su análisis crítico construye su concepto de número, mostrándole a el lector la importancia de la relación inquebrantable entre matemáticas y filosofía.
Palabras clave Gottlob Frege; Concepto de número; Empirismo, Intuición, elemental;

1. Introducción

Cuando el adjetivo *elemental* aparece en un discurso, su significado parece ser aseveración simple. Sin embargo, esto no es así. Pues, es sólo una cualidad de las varias aserciones que ofrece la expresión mencionada. La real academia de lengua española (RAE) propone otros adjetivos a la misma expresión: "1. Perteneciente o relativo a un elemento. 2. Fundamental, primordial. 3. Referente a los elementos o principios de una ciencia o arte" [12]. De hecho, las anteriores cualidades no están lejos de aparecer en las Matemáticas. Por ejemplo, la obra *Elementos* atraviesa los anteriores adjetivos. En el primer caso a la Geometría griega. Como segundo caso, puede asociarse al hecho de que fue enseñado en las escuelas. Por último con los postulados del *Libro I*.
Durante mucho tiempo se guardó la esperanza de que la Geometría Euclidiana poseía fundamentos sólidos, y que sus verdades iban acorde a una representación real de la naturaleza. Sin embargo, este paradigma cambió, es decir, la Geometría esbozada en *Elementos* ya no tiene el mismo estatus que sostuvo durante veintidós siglos. Esto es debido al postulado V que sostiene un vinculo entre la teoría de las líneas rectas paralelas y el infinito en potencia y acto; dicha teoría encontró posteriormente en matemáticos como: Carl Gauss (1777-1845), János Bolyai (1802-1860) y Nicolái Lobachevsky (1792-1856) interpretaciones que chocan con la intuición espacial que poseemos y que las mismas nos daban por verdaderos en la escuela. Dichas interpretaciones son consecuencia de una larga historia sobre la independencia del quinto postulado respecto a los otros cuatros postulados. Esto provocó que las "verdades" de la geometría euclidiana en las que descansaba el fundamento para comprender el mundo sensible [1], perdieran ese rótulo y se acentuaran más las dudas sobre el corpus matemático que tenía el rótulo de Geometría.
Este hito tuvo otra consecuencia en el ámbito matemático, y es debilitar las entidades matemáticas, en otras palabras, quedar sin fundamentos, debido a que la geometría proporcionaba hasta ese momento la seguridad de la existencia de dichos objetos [1], por lo que se tuvo que buscar teorías matemáticas

que volvieran a darle un estatus de seguridad a toda la matemática construida hasta ese momento.
Gauss,uno de los referentes matemáticos de aquel entonces, propuso que en la Aritmética quizá estaba la solución al fundamento de las Matemáticas, y por ende recuperar el estatus de la verdad desestabilizada del momento [6]. Así, es el momento de la historia de las Matemáticas en el que va aparecer el protagonista Gottlob Frege.
Gottlob Frege (1848-1925) quien estuvo afín de la propuesta gaussiana, notó que él problema era aún mayor, señalando que los matemáticos de su época no sabían de lo que hablaban ni aún nivel "elemental" ([5]; [16]). A partir de ese hecho, Frege dedicó su vida a entender lo que eran los números y en la obra *Fundamentos de la Aritmética* propone una respuesta a la cual Bertrand Russell (1892-1970) le da un mérito importante: "La pregunta ¿qué es un número? se ha planteado con frecuencia, pero solo en nuestros días se le ha dado una respuesta correcta. La respondió Frege, en 1884, en sus *Grundlagen der Arithmetik*" [14, p. 19]. Esta obra es trascendental por dos hechos. Por un lado, Frege se tomó el trabajo de hacer visible al lector el concepto del número y/o de la Aritmética acudiendo a otros autores como: Leibniz, Newton, Baumman, Grassman, Schröder, pues no quería tener los mismos errores cuando publicó su primera obra titulada *Conceptografía* [16], puesto que, según Stepanians, M. [16] "un crítico influyente de la conceptografía había objetado que Frege ignoraba el trabajo de otros investigadores y es evidente que él no quiso exponerse de nuevo a ese reproche" [p. 48]. Por otro lado, Frege estableció su concepto de número bajo tres reglas, las cuales se hacen visibles en sus ideas:

> hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo;
> el significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en palabras aisladas;
> hay que tener presente la diferencia entre concepto y objeto. [2, p. 20]

La premisa principal de esta obra es exponer la tesis logicista: "La aritmética es reducible a la lógica" y expone como es posible llegar a ella, mediante el concepto de número como objeto lógico. En medio del desarrollo de su obra, Frege reaccionó reaccionó respecto de dos tendencias filosóficas opuestas, la Kantiana (intuición-razón) y el Empirismo de Mill.

2. *Fundamentos de la Aritmética*

John Stuart Mill (1806-1873) propuso que la noción de número, se adquiere como resultado de hacer semejanzas y agrupaciones de objetos del mundo sensible [9]. Frege refutó la postura de Mill, la cual se apoya en: (1) las impresiones sensoriales y (2) hechos en los que se aplica la estructura matemática al mundo real. Para ver (2), Mill se apoya en dos afirmaciones, el primero consiste en que "los cálculos no se siguen de la definición misma, si no de los hechos observados" [2, pp. 32-33], y el siguiente enunciado: "lo que está compuesto de partes, está compuesto de partes de estas partes" [2, p. 35]. Respecto al primer enunciado, Mill haría entender que las leyes matemáticas surgen a partir de la experiencia, haciendo una especie de inducción, pero esto es un error como lo hace notar Frege, ya que Frege argumenta que Mill confunde los hechos aritméticos con una aplicación de los mismos y lo hace así: "$5 + 2 = 7$ no significa que si se vierten sobre 5 volúmenes de un liquido 2 volúmenes del mismo, se obtienen 7 volúmenes de liquido, sino que esto es un aplicación del primer enunciado, aplicación que se cumple únicamente cuando no aparece una modificación del volumen a consecuencia de un fenómeno químico" [2, p. 35]. Para abordar (1), se debe aclarar el término psicologismo, que según Kenny, A [5] es "la psicología es el estudio experimental de la mente, la búsqueda de regularidades que gobiernan los fenómenos mentales." [p. 73]. Ahora bien, siendo Mill un empirista es natural que acuda a fenómenos mentales, porque, la experiencia nos hace recrear cierto estimulo mental sobre un hecho asociado al mundo real. Y aquí, la critica de Frege es más audaz, reaccionando así: "Si el dos fuera una imagen, ésta sería ante todo solamente mía. La imagen que tiene otro es ya, en cuanto tal, otra imagen. Entonces, tendríamos quizá muchos millones de doses. Debería decirse: mi dos, tu dos, un dos, todos los doses" [2, p. 55]. Para lo cual, es evidente que él número en vez de ser objetivo como lo concebimos se torna ambiguo, debido a la subjetividad del psicologismo y empirismo fundado por Mill. A partir de esto, se tiene que el concepto del número abstraído de la realidad, bajo el empirismo no sea admitido si el cero es considerado un número, ¿qué fenómeno de la realidad se puede asociar al cero? A partir de

https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/ ISSN: 3084-7761
EDICIÓN 2025

lo anterior, Frege deduce que las verdades aritméticas no son a posteriori, deben ser a priori. Por lo tanto, reaccionó sobre la lectura de Kant.
Inmanuel Kant (1724-1804) afirmó que las verdades de la Geometría eran sintéticas y a priori. Lo cual es natural pensar que si la Geometría era quien respaldaba los fundamentos de la Matemática, entonces la Matemática, en particular, la Aritmética también lo fuese. Por eso, Frege planteó cuestiones sobre la certeza de la seguridad que tiene las propiedades aritméticas, tanto en su demostración como la forma de llegar a ellas. Para ello, inició Frege recalcando que para Kant las expresiones como $1 + 1 = 2$ son sintéticas y no es posible dar una demostración de las mismas, pero a pesar de ello no tienen un carácter de axioma, debido a que, no solo hay expresiones de esa forma, sino infinitas combinaciones de expresiones aritméticas [2]. En consecuencia, ¿cómo se podría acudir a la intuición kantiana para sostener que expresiones como la anterior sean verdaderas?, si entre más grande sea una expresión más difícil es que la intuición nos guié:

> ¿es acaso evidente que 135664+37863=173527?
> ¡No! Y es precisamente esto le lleva a Kant a sostener el carácter sintético de estos enunciados. Pero lo anterior más bien habla sobre su indemostrabilidad. Pues, ¿de que otra manera pueden ser aceptados, como no sea mediante una demostración, dado que no son directamente evidentes? Kant quiere ayudarse con la intuición de dedos o puntos, con lo cual cae en el peligro de hacer que estos enunciados aparezcan como empíricos, en contra de su propia opinión; pues la intuición de 37863 dedos no es, en cualquier caso, una intuición pura [2, pp. 29-30]

Además, acudir a la intuición tampoco es muy viable, pues si con números grandes genera conflictos, con números pequeños también: "pues ya sólo 10 dedos, según las posiciones relativas que ocupen entre sí, pueden producir las más diversas intuiciones" [2, p. 30]. Por lo tanto, la postura Kantiana no es tampoco favorable en cierto sentido para satisfacer la respuesta a las cuestiones que establece Frege. Por ello, encuentra en Leibniz cierta luz sobre la demostrabilidad de expresiones como la anteriormente citada, y así establecer que las verdades matemáticas como su demostración y obtención son analíticas y a priori.
Frege, expone de las ideas de Leibniz al manifestar que él redujo la cuestión sobre creación de los números mediante su precedente y de hecho cita a Leibniz:

> No es una verdad inmediata que 2 y 2 son 4; supongamos que 4 significa 3 y 1. Se le puede demostrar de esta manera:
> Definiciones:
> 1. 2 es 1 y 1,
> 2. 3 es 2 y 1,
> 3. 4 es 3 y 1.
> Axioma: Si se reemplaza una cosa por otra igual, la igualdad persiste.
> Prueba: 2+2=2+1+1=3+1=4.
> Def. 1. Def. 2. Def. 3
> Luego por el axioma 2+2=4 [2, p. 30]

Haciendo notar que la Aritmética es analítica y a priori. Lo cual queda establecido así:

> Por mucho que se menosprecie la deducción, no se puede negar que las leyes fundadas en la inducción son insuficientes [refiriéndose a Mill]. De éstas últimas deben deducirse nuevos enunciados que no están contenidos en ninguna de ellas. Que éstos se hallen en cierto modo, incluidos en todas ellas juntas, no nos exime de la tarea de extraerlos de ahí y establecerlos por sí mismos. Con ello se abre la siguiente posibilidad: en vez de hacer depender una deducción directamente de un hecho, se puede dejar éste tal como está y admitir su contenido como condición. Si en un razonamiento se sustituyen de este modo todos los hechos por condiciones, se obtendrá el resultado de manera que, de una serie de condiciones, se desprende una conclusión [2, p. 43]

Apartir de la demostración de Leibniz queda aclarar que significa 1. Frege ya no acude a Leibniz, pues él hace una definición circular sobre lo uno: "Uno es lo que reunimos por medio de un acto del entendimiento” [2, p. 58]. Frege para dar con la respuesta sobre el significado de 1, propuso asignarle números a los conceptos, estableciendo en ellos su diferencia. Así puedo encontrar la relación entre el número y su concepto:

> Si yo, por ejemplo, al considerar un gato blanco y uno negro, prescindo de las propiedades por las que ellos se distinguen, obtengo quizás el concepto «gato». Si ahora pongo a ambos bajo este concepto y los llamo unidades, el gato blanco sigue siendo blanco y el negro sigue siendo negro. Incluso si no pienso en sus colores, o me propongo no sacar conclusiones de su diferenciación, no por ello se volverán gatos sin color; permanecerán tan distintos como eran. El concepto «gato», que se ha obtenido de este modo por abstracción, ya no contiene, es verdad, las peculiaridades, pero precisamente por eso es sólo uno.
> Por procedimientos meramente conceptuales no se consiguen hacer iguales cosas distintas; pero si se consiguese, ya no se tendrían cosas, sino sólo *una* cosa [2, p. 62].

Para llegar al corazón de la idea que guarda el concepto de número fregeano, él mismo nos advierte que en el contexto de un enunciado es posible decantar al número. Además propuso dos ejemplos, contextualizando que los números aparecen en los conceptos como sucedió en el ejemplo del concepto gato:

> Cuando digo: «Venus tiene 0 lunas» no es que halla allí ninguna luna o agregado de lunas del que pudiera afirmarse algo; pero al *concepto* «luna de Venus» se le atribuye una propiedad, a saber, la de que nada cae bajo él. Si digo: «del coche del Kaiser tiran cuatro caballos», atribuyo el número cuatro al concepto «caballo que tira del coche del Kaiser»[2, p. 73]

Sin embargo, este no es el único concepto en que cae el número cuatro, si yo digo las cuatro patas sostienen la mesa del comedor, es claro que el número cuatro de nuevo cae en el concepto “patas que sostienen la mesa del comedor”, a raíz de ello Frege puede definir al número como: “el número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto «equinúmerico al concepto F»” [2, p. 92]. Con ello, logra en la palabra equinumérico establecer una función biyectiva y el resultado es que cada clase de equivalencia resulta ser los números que caen bajo los conceptos. En nuestro ejemplo, en la clase de equivalencia del concepto patas que sostienen la mesa del comedor, está el caballo que tira del coche del Kaiser. Con esta definición, logra definir al número cero, uno y el sucesor de un número, que es finalmente lo que caracteriza a los números naturales, y así, como se puede apreciar de su definición, logró capturar al número mediante un objeto lógico como lo es la relación de biyectividad.

Referencias

[1] Falk, M. *Corrientes del pensamiento matemático del siglo XX*. Vol. 1-2. Bogotá: Universidad Antonio Nariño, 2012.

[2] Frege, G. *Los Fundamentos de la aritmética:investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. Trad. por U Moulines. Con com. de Claude Imbert. Con intr. de Jesús Mosterín. Barcelona: Editorial Laia, S. A, 1972. ISBN: 84-7222-454-6.

[3] Frege, G. *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Ed., trad., com. e intr. por L. Valdés. Con notas de L. Valdés. Madrid: Editorial Tecnos, 1998.

[4] Guevara, J. «¿Cambió el concepto de número con la crisis de los fundamentos de la matemática? [tesis de pregrado]». En: (2021). URL: http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/12980/Cambio%5C%20el%5C%20concepto%5C%20de%5C%20n%5C%C3%5C%BAmero.pdf?sequence=8&isAllowed=y.

[5] Kenny, A. *Introducción a Frege*. Trad. por Carmen García Trevijano. Madrid: Cátedra, 1997.

[6] Kline, M. *Matemáticas La perdida de la Certidumbre*. Trad. por Andrés Ruiz Merino. Barcelona: Siglo xxi de españa editores S.A, 1985.

[7] Kneale, W. y Kneale, M. *El desarrollo de la lógica*. Trad. por J. Mugerza. Madrid: Editorial Tecnos, 1980.

[8] Körner, Sthepan. *Introducción a la filosofía de la matemática*. Trad. por Carlos Gerhard. México: Siglo XXI, 1967.

[9] Luque, C., Jiménez, H y Ángel, J. *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Representar estructuras algebraicas finitas y enumerables*. 2.ª ed. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2013.

[10] Mosterín, J. *Los Lógicos*. Ed. por S.A. Espasa Calpe. Madrid: ESPASA, 2000.

[11] Perez, J. *La aritmetica según Gottlob Frege. Un ejemplo de matemáticas elementales*. 2002. URL: http://funes.uniandes.edu.co/9104/1/Aritmetica2002Perez.pdf.

[12] Real Academia Española. *Diccionario de la lengua española, 23ª.ed., [versión 23.5 en línea]*. URL: https://dle.rae.es/elemental?m=form.

[13] Rossi, J. «Consideraciones generales sobre el concepto de número en los Fundamentos de la Aritmética de Gottlob Frege [tesis de pregrado]». En: (2015). URL: http://repository.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/3276/TE-18975.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

[14] Russell, B. *Introducción a la filosofía matemática*. Trad. por Mireia Bofill. Buenos Aires: Paidós, 1956.

[15] Soames, S. *El Surgimiento De La Filosofía Analítica: Frege, Moore, Russell y Wittgenstein*. Ed. por E. Villanueva Chigne. Trad. por Wong Melgar, F., Gamboa Castillo, J., Dammert Lastres, P., y Villanueva Chigne, E. Madrid: Editorial Tecnos, 2019.

[16] Stepanians, M. *Gottlob Frege. Una introducción*. Ed. por S. Rahman. Ed. por J. Redmond. Trad. por J. Redmond. Vol. 1. Cuadernos de lógica, Epistemología y Lenguaje. College publications, 2007.

ISSN: 3084-7761

FILOSOFÍA, HISTORIA Y DIVULGACIÓN MATEMÁTICA
REVISTA THEOREM
https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/
ISSN: 3084-7761
Año 2025 - Nº005

Limitación de una generalización euclidiana en la historia: ángulos interiores del triángulo esférico

Limitation of a Euclidean generalization in history: interior angles of the spherical triangle

Melvin Cruz-Amaya
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN)
melvin.cruz@cinvestav.mx
Ciudad de México, México

Gisela Montiel-Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN)
gmontiele@cinvestav.mx
Ciudad de México, México

Roberto Vidal-Cortés
Universidad Alberto Hurtado (UAH)
rvidal@uahurtado.cl
Santiago de Chile, Chile

Resumen

Ante la necesidad de tratar con las generalizaciones euclidianas, en este documento se presenta un estudio histórico-epistemológico desde la Socioepistemología, que a través de un análisis cualitativo de contenidos busca identificar y caracterizar prácticas matemáticas asociadas a la generalización euclidiana, la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico, en la génesis de la geometría esférica, de tal forma que estas prácticas sirvan para configurar un posicionamiento epistemológico inicial para el diseño didáctico. Como resultado, se reconoce la influencia de los cambios políticos, económicos, culturales y científicos de la cultura del autor en la construcción y estructura de la actividad matemática; además, en términos epistemológicos, esta geometría se caracteriza por propiedades como la relación de divergencia-convergencia entre rectas, consecuencia de la articulación de varias prácticas matemáticas.

Palabras clave: geometrías no euclidianas, geometría esférica, prácticas matemáticas.

Abstract

Given the need to deal with euclidean generalizations, this paper presents a historical-epistemological study from Socio-epistemology, which through a qualitative content analysis seeks to identify and characterize mathematical practices associated with the euclidean generalization, the sum of the interior angles of a spherical triangle, in the genesis of spherical geometry, in such a way that these practices serve to configure an initial epistemological positioning for the didactic design. As a result, the influence of the political, economic, cultural and scientific changes of the author's culture in the construction and structure of mathematical activity is recognized; furthermore, in epistemological terms, this geometry is characterized by properties such as the relation of divergence-convergence between straight lines, a consequence of the articulation of several mathematical practices.

Keywords: non-euclidean geometries, spherical geometry, mathematical practices.

EDICIÓN 2025

1. Introducción

Los procesos de incorporación de las Geometrías No Euclidianas (GNE) en lineamientos curriculares de bachillerato y de la formación del profesorado de matemáticas son una línea de estudios relativamente reciente (Cruz-Amaya y Montiel-Espinosa, 2024). Estos estudios exteriorizan carencias asociadas al conocimiento sobre estas geometrías y a su didáctica. En Brasil, donde formalmente se han incorporado las GNE en cuatro estados —Sãu Paulo, Paraná, Ceará y Rio Grande do Sul— (Pinto, 2013), sus contenidos fueron desatendidos por el profesorado como consecuencia de la falta de formación, de metodologías de enseñanza y aprendizaje y de libros de texto, además, por el desconocimiento de las propiedades o la naturaleza de estas geometrías (Caldatto y Pavanello, 2014). Estos fenómenos reorientaron la investigación, buscando profundizar en los aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos de estas geometrías, para fundamentar su enseñanza y aprendizaje en diferentes poblaciones.

Por el interés en estos aspectos, en el presente se sintetiza una revisión de literatura en el marco de un contexto global y latinoamericano. Sobre los aspectos epistemológicos, existe un desconocimiento de la naturaleza de estas geometrías, ya que únicamente se han hecho intentos por replicar en el aula de matemáticas las condiciones que permearon la fundamentación matemática de las GNE en la historia (Aparecida y Pinto, 2021; Silva y Yonezawa, 2017). La historia de las matemáticas evidencia la gran influencia de los Elementos de Euclides y, por ende, de la arquitectura de la geometría euclidiana, la cual ha marcado no solo el desarrollo de una geometría universal única, vigente hasta la aparición de la fundamentación matemática de nuevas geometrías que desafiaron el quinto postulado. Esta transición generó controversias importantes en la comunidad matemática, al punto de considerarse como una de las grandes crisis de la matemática.

Además, Euclides trazó una arquitectura para la comunicación científica que se legitimó mediante un enfoque deductivo, seguido por obras tan relevantes como Sobre las revoluciones de los orbes celestes de Copérnico y los Philosophiæ naturalis principia mathematica de Newton (Vidal-Cortés, 2024). En el primer cuarto del siglo XX, el programa formalista de Hilbert y los nuevos Elementos de la Matemática de Bourbaki reavivan esta arquitectura, abriendo un debate sobre la verdad en la ciencia y el absolutismo, no solo en matemáticas, sino también con la misma noción de ciencia. Por ello, tiene sentido la permanencia de la geometría euclidiana y la replicabilidad de la fundamentación matemática de las GNE en el aula; sin embargo, dado que esta naturaleza puede mostrar nuevas o más robustas estrategias para su atención didáctica, existe una necesidad de ser estudiada en profundidad.

Sobre los aspectos didácticos, se reconoce que hay carencia de recursos didácticos para el estudio de estas geometrías. Sin embargo, también se reconocen avances sobre enfoques metodológicos —procesos generales de estructuración de la enseñanza— y estrategias de enseñanza —procesos particulares de enseñanza—. Por ejemplo, el enfoque de la geometría comparativa, propuesto desde 1990 por István Lénárt, profesor e investigador húngaro (Lénárt, 2021). Este enfoque pretende una enseñanza comparada entre la geometría plana y la geometría esférica para luego agregar la comparación con la geometría hiperbólica. Entre las estrategias de enseñanza destacan la interdisciplinariedad, el uso de material manipulable y el uso de tecnologías digitales (Aparecida y Pinto, 2021; Soares et al., 2020).

Desde los aspectos cognitivos, se identifican y describen a las generalizaciones euclidianas como un fenómeno didáctico-cognitivo que se antepone al estudio de GNE en cualquier población (Lovis et al., 2014). Este fenómeno fue caracterizado por primera vez por Kattsoff (1960) como dificultades psicológicas a través de ideas euclidianas, también fue nombrado reglas euclidianas por Bolondi et al. (2014), y finalmente como generalizaciones euclidianas (Lovis et al., 2014). Estas generalizaciones "son evidentes cuando algunos razonamientos euclidianos —verdaderos únicamente en esta geometría— pueden ser considerados generales sin reconocer la especificidad de la superficie en la que se trabaja" (Cruz-Amaya y Montiel-Espinosa, 2024, p. 9), por ejemplo, que la distancia más corta entre dos puntos dados corresponda a la medida del segmento que los une, o bien que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°.

Entre estas generalizaciones, se reconoce relevante la suma de los ángulos interiores de un triángulo, ya que su limitación en una superficie diferente al plano genera una distinción inmediata entre geometrías. En efecto, este reconocido teorema de la geometría euclidiana resulta lógicamente equivalente al quinto postulado, dada su dependencia inmediata en su demostración, con dicho postulado. Además, de acuerdo con Cruz-Amaya y Montiel-Espinosa (2024), estas generalizaciones pueden tener un papel importante en el diseño didáctico a través del paso de su funcionalidad en el plano a su limitación en otra superficie. Ante esta problemática y considerando las aportaciones de la literatura, se plantea la pertinencia de un estudio histórico–epistemológico situado en la génesis de la geometría esférica que responda a las preguntas de investigación: ¿qué caracteriza a la actividad matemática en la que se estudia históricamente la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico?, ¿qué condiciones culturales, sociales e intelectuales la enmarcan? y ¿qué consideraciones epistemológicas se derivan de su análisis? En esta dirección, se plantea como objetivo de investigación, identificar y caracterizar prácticas matemáticas asociadas a la generalización euclidiana, la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico, en la génesis de la geometría esférica. Con este resultado, se pretende la configuración de un posicionamiento epistemológico inicial para fundamentar diseños didácticos que traten esta geometría.

2. Fundamentos teóricos

Este estudio se enmarca en la Socioepistemología, teoría que concibe a la actividad matemática humana, contextual y pragmática —exponiendo prácticas que acompañan y preceden al conocimiento matemático— (Cantoral et al., 2015). Para explicar la construcción social del conocimiento matemático, estas prácticas se organizan en un modelo de anidación; y para este estudio, se consideran sus primeros tres niveles. A las primeras interacciones observables entre el sujeto y el medio en su relación con la matemática se les denominan acciones. Una articulación de ellas, bajo una intencionalidad observable, constituye una actividad. Finalmente, las prácticas socialmente compartidas son reconocidas como formas establecidas y reiteradas al hacer matemática que organizan las actividades (Cantoral et al., 2015).

La racionalidad del sujeto se entiende permeada por el contexto en el que construye el conocimiento —contexto de significación, porque da sentido en tanto funcionalidad a la matemática involucrada (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021)—. Con el fin de dar cuenta del carácter contextual de la actividad matemática, desde la propuesta de López-Acosta y Montiel-Espinosa (2022) este contexto se estratifica en: el contexto cultural, refleja pertenencia a un grupo; contexto situacional, influencia del espacio y tiempo donde se da la construcción; y contexto de la situación específica, situaciones de la actividad matemática particular.

3. Fundamentos metodológicos

Este estudio se desarrolla a través de una trayectoria metodológica organizada mediante un análisis cualitativo de contenido que requiere del análisis contextual y textual (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, 2022).

Esta trayectoria se divide en las siguientes seis etapas: (1) determinación de un objeto de análisis (texto histórico en este caso), proceso que tiene su propia metodología, para ello se hizo una revisión de literatura sobre los orígenes de la geometría esférica y se tomaron en cuenta los criterios de selección que presentan Wardhaugh (2010): los relativos a la investigación o decisiones metodológicas; los aspectos técnicos, referentes al acceso al texto; y los relativos a la pieza matemática; (2) recolección y selección de fuentes de datos asociadas al objeto de análisis, estas se organizaron en fuentes primarias, las cuales constituyen el principal acceso a la obra; secundarias, las constituyen documentos que muestran datos indirectos del momento histórico, tales como biografías e interpretaciones de la fuente primaria; y terciarias, estas están basadas en fuentes primarias y secundarias, por ejemplo, los estudios históricos-epistemológicos, libros de historia y biografías generales (Wardhaugh, 2010).

Seguidamente, se desarrolla el (3) preanálisis de los datos a través de un primer acercamiento al contexto y al texto, donde se seleccionan las unidades de análisis. (4) El análisis de datos consiste en el estudio contextual y textual con herramientas analíticas: el análisis textual se centra en la caracterización de las prácticas matemáticas. Para identificar las acciones se plantean los cuestionamientos ¿qué y cómo lo hizo?; para las actividades los cuestionamientos ¿para qué y por qué lo hizo? Por su parte, las prácticas socialmente compartidas son reconocidas como formas establecidas y reiteradas al hacer

https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/ ISSN: 3084-7761

matemática que organizan las actividades (Cantoral et al., 2015); para el análisis contextual, en cada estrato se plantearon diferentes preguntas considerando las referencias propuestas por Wardhaugh (2010). Para el contexto cultural se asocian las referencias socioculturales e intelectuales; para el contexto situacional las referencias socioculturales, biográficas e intelectuales; y para el contexto de la situación específica las referencias intelectuales. Posteriormente, a través de la (5) interpretación e inferencia, se construye una hipótesis epistemológica, retomando "la génesis de los saberes en términos de las prácticas (la matemática como actividad humana) y las circunstancias socioculturales que condicionan dichas prácticas (contexto de significación)" (López-Acosta y Montiel-Espinosa, 2022, p. 542); para finalmente presentar los (6) resultados del estudio.

4. Análisis y resultados

Seleccionamos como texto de análisis Esférica de Menelao de Alejandría (ca 70 - 130 d. C), escrito alrededor de los 100 d. C. Esta obra es considerada el primer texto que trabaja el desarrollo del triángulo esférico como geometría sobre la superficie de la esfera, por ello es denominada la primera obra sobre geometría esférica (Rashed y Papadopoulos, 2017). Fue escrito en griego; aunque no se cuenta con la versión original, existen algunas traducciones al árabe antiguo; de estas últimas retomamos, para el estudio como fuente primaria, una traducción al inglés titulada Menelaus' Spherics. Early Translation and al-Māhānī /al-Harawī's Version por Rashed y Papadopoulos (2017). Dado el interés particular de este estudio, se selecciona como unidad de análisis la proposición 12 de Esférica de Menelao: "En cualquier triángulo, un ángulo exterior es menor que la suma de los dos ángulos opuestos interiores, y <la suma de>los tres ángulos del triángulo es mayor que dos ángulos rectos" (Rashed y Papadopoulos, 2017, p.526, traducción propia).

5. Análisis y resultados contextuales

Como ejemplo del análisis contextual se presenta una parte de la organización de los datos asociados al contexto cultural (ver Cuadro 1). Estos datos devienen de todas las fuentes de datos.

Referencias socioculturales	*¿En qué época y lugar vivió Menelao?*
	Vivió entre el siglo I y II d. C., entre Alejandría y Roma, en la civilización helénica (Goulet, 2005).
	¿Qué sucesos políticos, sociales y económicos caracterizan esa época y lugar?
	Roma era la única potencia económica del Mediterráneo. Registros de la relación de Menelao con algunos emperadores romanos (Trajano y Domiciano) (Goulet, 2005).
	¿Hubo sucesos importantes e influyentes previos a la vida de Menelao?
	Organización económica y religiosa del pueblo egipcio, la conquista de Alejandro Magno y el desarrollo de Alejandría (Smith, 1975).
	¿Dan estos sucesos sentido de pertenencia al autor?
	Hacen que Menelao se considere un matemático y astrónomo romano y griego cercano a emperadores romanos.
	¿Qué relación tienen estos sucesos con la vida personal y profesional de Menelao?
	Menelao se relaciona con Roma y Alejandría, hace observaciones astronómicas en Roma y estudia la ciencia griega (Rashed y Papadopoulos, 2017).
Referencias intelectuales	*¿Qué sucesos matemáticos, filosóficos y científicos caracterizan la producción académica de esa época y lugar?*
	Principios matemáticos y observaciones independientes en la ciencia alejandrina. Almagesto de Ptolomeo condensa el desarrollo astronómico griego y romano con influencia de Menelao (Smith, 1975).
	¿Hubo sucesos importantes e influyentes previos a la vida de Menelao?
	Observaciones y anticipaciones astronómicas en Egipto y Babilonia, avances matemáticos griegos y romanos a través del uso de la demostración directa y la sistematización axiomática y avances astronómicos desde la cosmovisión aristotélica del universo y la creación de la esfericidad (Sidoli, 2018).
	¿Dan estos sucesos sentido de pertenencia al autor?
	Menelao tenía libertad de corriente filosófica, por lo que se basaba en principios matemáticos y observaciones astronómicas. La relación geometría-astronomía en la esfericidad motivó el desarrollo de *Esférica* (Smith, 1975).
	¿Qué relación tienen estos sucesos con la obra de Menelao?
	La doble implicación en el desarrollo geométrico y astronómico explica el interés de Menelao por la geometría esférica y el nuevo enfoque sobre esta geometría (Rashed y Papadopoulos, 2017).

ISSN: 3084-7761

Cuadro 1: Organización de datos para la descripción del contexto cultural. Fuente: Construcción propia.

Con base en esta organización de datos contextuales por cada uno de los estratos, se desarrolla la caracterización del contexto cultural, el contexto situacional y el contexto de la situación específica.

El contexto cultural se enmarca en la época romana de la civilización helénica, en la que vivió Menelao (Goulet, 2005). Esta civilización se caracteriza por cambios políticos, económicos y culturales que devienen de los egipcios y babilónicos. Además, influenciada por la estabilidad política, económica y científica que vivió Alejandría desde que Ptolomeo I tomó el poder en Egipto en el año 306 a. C. (Smith, 1975). Durante los años en que vivió Menelao, Roma era la única potencia económica del Mediterráneo. Menelao disfrutaba de esta estabilidad, ya que mantenía relación con algunos de los emperadores romanos, Domiciano y Trajano (Goulet, 2005).

El trabajo de Menelao es consecuencia del desarrollo astronómico y geométrico de sus predecesores. La astronomía junto a la geometría formó parte desde el siglo VI a.C. del Quadrivium, desarrollado en la antigua Grecia y que con la música y la aritmética conformaban las 4 artes liberales que debía ser parte de la formación de toda persona culta, especialmente aquellos que se iniciarían en el mundo del clero. Por esta razón probablemente, desde los pitagóricos hasta Ptolomeo (100 d. C. – 170 d.C.), la geometría y astronomía fueron consideradas principales ramas de estudio y de la matemática. Además, la cosmovisión aristotélica propuesta por Aristóteles (384 – 322 a.C.) se mantenía en tiempos de Menelao como la visión del universo (Sidoli, 2018). Por otra parte, la geometría llega a Menelao mediante obras en la arquitectura euclidiana, como forma deductiva de organizar el conocimiento matemático y la demostración como herramienta matemática para el convencimiento y aspiración del conocimiento de la verdad. La relación entre la geometría y la astronomía potencia la creación de la esfericidad como rama de la geometría aplicada a la astronomía, por lo que se le asocian cuatro obras: Sobre las esferas giratorias de Autólycus (333-300 a.C.), Fenómenos de Euclides (alrededor del año 300 a.C.), Esférica de Teodosio (alrededor del año 200 a.C.) y Esférica de Menelao (alrededor del año 100 d.C.) (Henderson y Taimina, 2004).

Del contexto situacional se reconoce que Esférica se escribió alrededor de 100 d. C. en Roma. De la vida de Menelao se sabe muy poco; se reconoce de Alejandría por las referencias que hicieron Proclo y Pappus; luego se mudó a Roma manteniendo una relación con Alejandría (Goulet, 2005). Se le atribuyen seis libros: Esférica, Sobre el conocimiento de los pesos y la distribución de los diferentes cuerpos, tres libros sobre los elementos de geometría y el libro del triángulo; sin embargo, solo han sobrevivido traducciones de Esférica. Esférica es una obra dependiente del sistema axiomático de Elementos de Euclides, por ello se dice que fue escrita bajo una racionalidad euclidiana (Rashed y Papadopoulos, 2017). Además, Elementos de Euclides y Esférica de Teodosio son el fundamento en muchas de sus demostraciones. De esta última, Menelao utiliza la teoría de la polaridad, que refiere a la relación constante entre una recta esférica y su polo (centro). Al igual que Teodosio, Menelao presenta en Esférica dos proyectos: una geometría esférica deductiva sobre un conjunto inicial de elementos y la aplicación de la geometría a la astronomía antigua (Rashed y Papadopoulos, 2017).

Por su parte, el contexto de la situación específica se caracteriza en términos generales por al menos tres aspectos que hacen de Esférica una obra única y valiosa: el cambio de significado atribuido al término esfericidad, como geometría sobre la superficie de la esfera; la distinción que hace en las demostraciones, presentando la demostración directa; y la presentación de pocos elementos iniciales, tres definiciones. Además, entre algunas características particulares destaca la presentación por primera vez de la definición de triángulo esférico y el teorema de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor a 180 grados y no constante (Goulet, 2005). Asociado a la naturaleza esférica, se reconoce una relación importante, la teoría de la polaridad o relación entre recta-polo que retoma del trabajo de Teodosio. Son estas características las que permiten a Rashed y Papadopoulos (2017) mencionar que “a la vista de estas proposiciones y de otras del mismo tipo, es posible afirmar que Esférica de Menelao es la primera investigación sistemática de una geometría no euclidiana” (Rashed y Papadopoulos, 2017, p. 5, traducción propia).

Estos resultados permiten dar respuesta a la primera y segunda preguntas de investigación. Sobre la pregunta, ¿qué condiciones culturales, sociales e intelectuales enmarcan la actividad matemática en la que se estudia históricamente la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico? Se

ISSN: 3084-7761

puede explicitar que la construcción de Esférica de Menelao es consecuencia de los cambios políticos, económicos y culturales de los egipcios y babilonios; de la estabilidad política, económica y científica que vivió Alejandría; y de la extensión territorial y el desarrollo económico del imperio romano. Las condiciones intelectuales devienen del desarrollo geométrico y astronómico al que tuvo acceso Menelao. Dado que para su época se consideraba que la geometría y la astronomía eran ramas de la matemática y se mantenía una cosmovisión aristotélica del universo, tiene sentido la emergencia de la esfericidad (rama de la geometría aplicada a la astronomía) y, por consiguiente, la creación de Esférica. Por otro lado, ante la pregunta ¿qué caracteriza a la actividad matemática? se puede declarar que se caracteriza por presentarse a través de una demostración directa, diferente a las demostraciones por reducción al absurdo y por superposición de figuras utilizadas por los antecesores de Menelao; y principalmente, por basarse en un cambio de significado al término esfericidad, entendido en el texto como la geometría sobre la superficie de la esfera. Además, por la estructura general del texto y el uso de Elementos de Euclides en la fundamentación de sus demostraciones, se considera una obra escrita bajo una racionalidad euclidiana.

6. Análisis y resultados textuales

Para el análisis textual de la proposición 12 de Esférica de Menelao, se utilizó la reconstrucción pragmática de la actividad matemática, descrita por López-Acosta y Montiel-Espinosa (2022) como una reconstrucción que explicita las prácticas (matemáticas) que permiten la construcción de esa matemática. Además, dado que la fundamentación de esta demostración requiere dos proposiciones anteriormente demostradas, éstas se describen a continuación:

Proposición 1 *Procedemos construyendo un ángulo igual a un ángulo dado contenido por grandes círculos en un arco de gran círculo conocido y en un punto de ese arco (Rashed y Papadopoulos, 2017, p. 410, traducción propia).*

Interpretación: dado un ángulo esférico, formado por la intersección de dos circunferencias máximas —las más grandes circunferencias que pueden trazarse en una esfera—, y dado un segmento de recta esférica y un punto de él, se construye en ese punto un nuevo ángulo igual al ángulo dado.

Proposición 11 *Si dos lados de una figura trilátera son menores que un semicírculo, entonces el ángulo exterior a uno de los dos ángulos del lado restante es mayor que el <interior>opuesto a él. Si los dos lados son mayores que un semicírculo, entonces el ángulo exterior es menor que el <interior>opuesto a él. Y si los dos lados AB, BC son iguales a un semicírculo, entonces el ángulo exterior es igual al <ángulo>interior. (Rashed y Papadopoulos, 2017, p. 424, traducción propia)*

Interpretación: con base en la Figura 1, en el triángulo ABC, si la suma de los lados AB y BC es menor que una semicircunferencia máxima, entonces el ángulo BCD (ángulo exterior del triángulo) es mayor que el ángulo CAB (ángulo interior del triángulo opuesto a él). Si la suma de los lados AB y BC es mayor que una semicircunferencia máxima, entonces el ángulo BCD es menor que el ángulo CAB. Y si la suma de los lados AB y BC es igual a una semicircunferencia máxima, entonces los ángulos BCD y CAB son iguales.

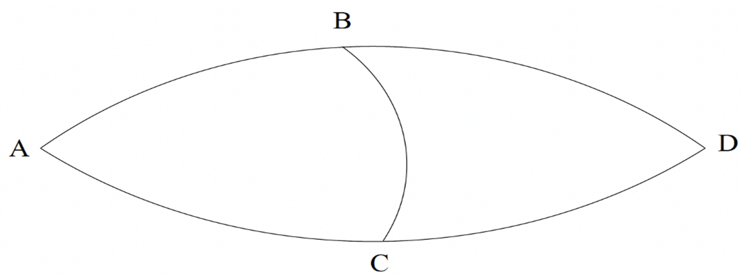


Figura 1: Diagrama propuesto para la Proposición 11. Fuente: Rashed y Papadopoulos (2017, p. 426).

ISSN: 3084-7761

Proposición 12 *Después del enunciado se presenta la exposición, donde se declaran los objetos en un diagrama inicial (Navarro, 2005) y la preparación, donde se exponen las relaciones entre los objetos expuestos (Vega, 2013) relacionadas con la Figura 2.*

Sea ABC un triángulo, y produzcamos AC a D; digo: el ángulo exterior BCD del triángulo ABC es menor que la suma de los dos ángulos opuestos A y B, y la <suma de los>tres ángulos del triángulo ABC es mayor que dos ángulos rectos. (Rashed y Papadopoulos, 2017, p. 528)

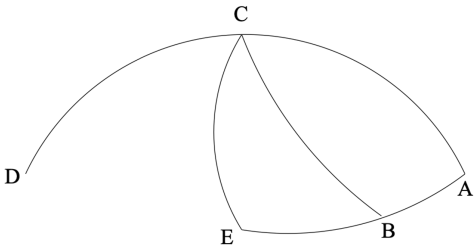
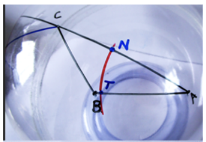
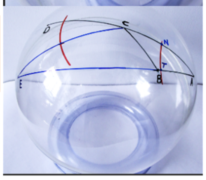
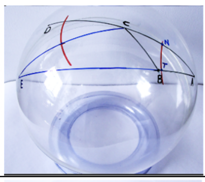
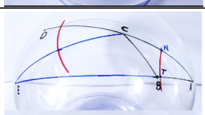
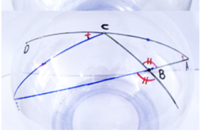
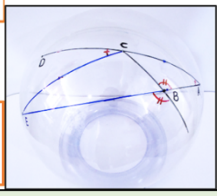


Figura 2: Diagrama propuesto para la proposición 12. Fuente: Rashed y Papadopoulos (2017, p. 528).

El análisis de prácticas se presenta en el Cuadro 2:

Nivel de acción		
Reconstrucción matemática	¿Qué hizo?	¿Cómo lo hizo?
Demostración: Hacemos un ángulo DCE igual al ángulo A (por la P1 [*construir un ángulo en un punto dado de un gran círculo que sea igual a un ángulo dado*]) y producimos AB hasta que se encuentre con CE en E (se extiende el segmento AB, reconoce la posibilidad de externerlo de forma ilimitada en la esfera, esto por el Epostulado2[*Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta*]).  	**Expone** elementos de partida y sus consecuencias. **Prolonga o extiende** arcos (arbitrarios y limitados). **Agrega** elementos auxiliares y **establece** elementos de referencia. **Traslada** ángulos y distancias. **Construye** un ángulo igual a otro.	**Continuando** el segmento AC en línea recta hasta el punto D y el segmento AB hasta el punto E. Tomando una distancia cualquiera desde el punto A y manteniendo esa distancia, forma un arco con centro en C. **Conservando** distancias.
Como el ángulo DCE es igual al ángulo A, entonces la suma de los dos arcos AE, EC es un semicírculo **[conclusión particular]** (esto por el P11[*en cualquier triángulo, si producimos uno de los lados y si el ángulo exterior es igual al ángulo interior que le es opuesto, entonces la suma de los dos lados que contienen el ángulo restante es un semicírculo; si es menor, entonces su suma es mayor que un semicírculo; y si es mayor, entonces la suma es menor que un semicírculo*]). 	**Distingue** ángulos interiores y exteriores de un triángulo. **Compara** ángulos interiores y exteriores de un triángulo. **Compara** la medida de un semicírculo con la suma de dos lados de un triángulo. **Distingue** ángulos según su medida.	**Relacionando** los semicírculos máximos con lados de un triángulo para referir a medidas de los lados de un triángulo y a ángulos iguales.
Entonces los dos arcos BE, EC son menores que un semicírculo [**conclusión particular**] (ENC8[*Y el todo es mayor que la parte*]), por lo tanto el ángulo ABC es mayor que el ángulo BCE [**conclusión particular**] (EP15[*Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí]*) y P11).   El ángulo ABC es igual a su opuesto por el vértice. Como su opuesto es mayor que el ángulo BCE (por P11), entonces el ángulo ABC es mayor que el ángulo BCE.	**Deduce** que la suma de dos segmentos es menor a un semicírculo. **Identifica** ángulos opuestos por el vértice. **Distingue** ángulos según su medida. **Compara** arcos con semicírculos y ángulos y reconoce sus medidas. **Caracteriza** ángulos.	**Relacionando** los semicírculos máximos con lados de un triángulo para referir a medidas de los lados de un triángulo y a ángulos iguales. **Comparando** esos dos lados (BE y EC) con otros dos lados que suman un semicírculo (AE y EC).

<table>
<tr>
<td>Los ángulos ACB, BCE, DCE son iguales a dos ángulos rectos (EP13[Si una recta levantada sobre otra recta forma ángulos, o bien formará dos rectos o bien (ángulos) iguales a dos rectos].

Pero el ángulo B es mayor que el ángulo BCE, el ángulo A es igual al ángulo DCE, y el ángulo ACB es común, por lo tanto los ángulos ABC, BCA, CAB son mayores que los ángulos ECD, ECB, BCA [Generalización]. Por lo tanto la <suma de los> ángulos del triángulo ABC es mayor que dos ángulos rectos.
</td>
<td>Junta tres ángulos y relaciona sus medidas con dos ángulos rectos.
Asocia dos ángulos rectos con los ángulos interiores de un triángulo.
Reconoce y señala que uno de los ángulos interiores de un triángulo forma parte de otro conjunto de ángulos.
Compara la medida de dos grupos de ángulos.</td>
<td>Dado el proceso de construcción, desde el mismo punto se generaron tres segmentos.
Construyendo, comparando y relacionando ángulos.

Por las relaciones que esos grupos de ángulos tienen.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el porqué y para qué lo hace.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

Expone los elementos de partida y sus consecuencias, prolonga segmentos, agrega elementos auxiliares, establece elementos de referencia, traza arcos y conserva distancias, para trasladar un ángulo.
Expone los elementos de partida y sus consecuencias, prolonga segmentos, agrega elementos auxiliares, distingue ángulos interiores y exteriores, reconoce ángulos iguales y la composición de una semicircunferencia, compara la medida de dos lados con la de un semicírculo y de ángulos interiores y exteriores, establece a la semicircunferencia como referente de medida y condiciona la medida de un ángulo, para equivaler lados de un triángulo con un semicírculo.
Expone los elementos de partida y sus consecuencias, compara un semicírculo con segmentos y dos grupos de ángulos, agrega elementos auxiliares, reconoce magnitudes y ángulos iguales si son opuestos por el vértice, distingue arcos de círculo y arcos de círculos máximos, identifica ángulos opuestos por el vértice y según su medida, relaciona segmentos con semicírculos y medidas de ángulos con dos ángulos rectos y adjunta ángulos, para diferenciar la suma de dos grupos de ángulos.

</td>
</tr>
</table>

Cuadro 2: Análisis de prácticas de la Proposición 12. Fuente: construcción propia.

El contexto de la situación específica describe una estructura deductiva del texto, por ello tiene sentido que en las tres actividades se mantengan las acciones de exponer los elementos de partida y sus consecuencias, agregar elementos auxiliares y usar las propiedades (de los elementos de partida y agregados) en la argumentación del proceso constructivo. En esta proposición se identifica que las actividades caracterizadas se encuentran organizadas por una forma de actuación matemática o práctica socialmente compartida, propia de la naturaleza esférica de esta geometría, a la que se ha denominado relación divergencia-convergencia. Esta relación se caracteriza de la siguiente manera: de la intersección en el punto N (ver Figura 3), las rectas de color verde y azul inician divergiendo una de la otra hasta la recta color rojo; de ahí empiezan a converger hasta volver a intersecarse en el punto opuesto a N, el punto M.

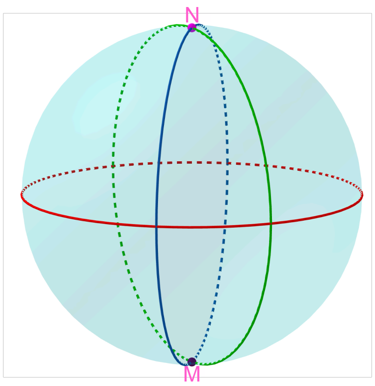


Figura 3: Relación entre dos rectas, divergencia-convergencia. Fuente: construcción propia.

https://hfm.unitru.edu.pe/index.php/revista-theorem/ ISSN: 3084-7761

Se dice entonces que esta relación organiza las actividades porque en la demostración la medida del ángulo A fue trasladada al ángulo DCE. La deducción de que la suma de los lados CE y AE es un semicírculo es consecuencia de aceptar que al prolongar los lados AB y AC del triángulo volverán a interceptarse en el punto opuesto a A, lo que a su vez es consecuencia de la relación de divergencia-convergencia entre esas dos rectas. Por lo mismo, al construir este nuevo ángulo (DCE), traza el segmento CE para equivaler los lados CE y AE del triángulo ACE a la medida de un semicírculo y diferenciar esos grupos de ángulos. Por ello, se dice que la relación divergencias-convergencia favorece el reconocimiento del cuadrante, donde cambia la relación de divergencia a convergencia; y el semicírculo, donde vuelven a converger, como referentes y unidades de medida de segmentos esféricos.

Como producto de este análisis, para dar respuesta a la tercera pregunta de investigación sobre las consideraciones epistemológicas, se configura la siguiente hipótesis epistemológica: la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico está fundamentada en la relación entre rectas, divergencia-convergencia, relación que es consecuencia de la naturaleza de la superficie esférica en la que se trabaja esta geometría. Por otro lado, se presenta el proceso de construcción geométrica de Menelao, que se compone por tres momentos: exponer los elementos de partida y sus consecuencias, agregar elementos auxiliares y usar sus propiedades en la argumentación y justificación de la construcción. La forma de agregar elementos auxiliares deviene de varias prácticas, por ejemplo, extender, trasladar, seccionar o componer segmentos y ángulos.

7. Discusión y conclusión

De la problemática y la revisión de literatura se justifica la importancia de los estudios históricos que tengan un interés en reconocer elementos epistemológicos, en este caso asociados a la geometría esférica. Además, se reconoce también el fenómeno denominado generalizaciones euclidianas como un obstáculo o un recurso didáctico (Lovis et al., 2014). Por ello, bajo la hipótesis de que los elementos epistemológicos asociados a una generalización euclidiana en su génesis histórica darán fundamento al uso de esa generalización como un recurso didáctico, se desarrolla este estudio sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Por los resultados, es posible asentir que la relación entre rectas esféricas de divergencia-convergencia trasciende a la generalización euclidiana estudiada y aporta en la caracterización de la naturaleza de la superficie esférica, es decir, trastoca toda geometría trabajada en esta superficie. Esta conclusión aporta al estudio de esta geometría en el sentido que describen Cruz-Amaya y Montiel-Espinosa (2019), Junius (2008) y Lénárt (1996), una primera etapa en el estudio de la geometría esférica debe trabajar en la compresión de la geometría intrínseca a la superficie de la esfera, es decir, que él o la aprendiz reconozca que puede hacer geometría sobre esa superficie y su influencia en los resultados geométricos. Por lo que, en términos de un diseño didáctico, esta relación podría caracterizarse en las primeras partes del diseño. Por la importancia de la interdisciplinariedad que se reconoce desde la revisión de literatura (Aparecida y Pinto, 2021), se propone describirla en el contexto de la geografía, por ejemplo, tomando dos meridianos cualesquiera y analizando el cambio de longitud de los arcos de paralelos entre esos meridianos desde el polo norte hasta el polo sur. De este modo, la geometría esférica aparece como un modelo geométrico para la comprensión del mundo y no solo como se suele divulgar: como una de las dos geometrías que emergen a partir de discutir y emprender la tarea de negar el quinto postulado de Euclides.

Por otro lado, en la hipótesis epistemológica se describe el proceso constructivo que siguió Menelao, de ahí se reconoce que toda tarea geometría puede guiarse por ese proceso: iniciando con la descripción de los elementos de partida y caracterizando las propiedades que tienen esos elementos, luego desarrollando la tarea geométrica en la que se agregarán nuevos elementos y con ellos nuevas propiedades geométricas, para finalizar con la justificación del desarrollo de la tarea usando las propiedades de los elementos geométricos involucrados.

Con base en los elementos epistemológicos asociados a la suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico y mediante el enfoque metodológico de enseñanza de la geometría comparativa (Lénárt, 2021), se acepta que es posible el uso de esta generalización como un recurso didáctico, generando el paso de su funcionalidad en el plano a su limitación en la esfera. Esta limitación provocará cuestionamientos importantes, tales como: ¿siempre van a medir más de 180 grados?, ¿cuánto es el máximo que pueden medir?, ¿existe un triángulo bi o tri-rectángulo? Cuestionamientos que también favorecen la problematización de la geometría euclidiana y con ello su significación.

Un estudio didáctico experimental que ponga en juego un diseño fundamentado en estos elementos podrá darnos evidencia empírica sobre este planteamiento, en ese sentido con el presente estudio se inicia una amplia línea de trabajo hacia la investigación de diseño, el desarrollo profesional docente, el análisis del discurso matemático escolar y aquellas otras rutas que fueron señaladas en la literatura. Además, dado que una de las poblaciones de mayor interés en este campo es el profesorado de matemáticas, se acepta que los resultados de este estudio exponen un acercamiento a la naturaleza de las geometrías en sentido amplio y, con ello, un fundamento para la construcción de recursos didácticos específicos, partiendo, como se ha querido señalar en este escrito, con la geometría esférica.

Referencias

[1] Aparecida, J., y Pinto, J. (2021), *A abordagem da geometria esférica no ensino e na aprendizagem matemática: o que apontam as pesquisas realizadas entre 2000 e 2018. Revista Tangram, 4(2), 59-82.*https://doi.org/10.30612/tangram.v4i2.11952

[2] Bolondi, G., Ferretti, F., y Gambini, A. (2014) *The relation between mathematical object/mathematical name: Conceptual changes between designation, description, denomination and definition. Proceedings of the Frontiers in Mathematics and Science Education Research Conference, 1(3), 169-176.* https://doi.org/10.30935/scimath/9640

[3] Caldatto, M., y Pavanello, R. (2014) *O Processo de Inserção das Geometrias Não Euclidianas no Currículo da Escola Paranaense: a visão dos professores participantes. Bolema, 28(48), 42-63.* https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a03

[4] Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015) *El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18(1), 5-17.* https://doi.org/10.12802/relime.13.1810

[5] Cruz-Amaya, M., y Montiel, G. (2019) *Angularidad en la esfera. Una exploración didáctica. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, 24, 107-115. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. ISSN:2346-0539.* https://www.researchgate.net/publication/333971981_Angularidad_en_la_esfera_Una_exploracion_didactica

[6] Cruz-Amaya, M., y Montiel-Espinosa, G(2024) *Las geometrías no euclidianas en y para la formación del profesorado de matemáticas: Una revisión de literatura. Olhar de professor, 27, 1-25.* https://doi.org/10.5212/OlharProfr.v.27.22500.021

[7] Cruz-Márquez, G., y Montiel-Espinosa, G. (2022) *Medición Indirecta de Distancias y el Trabajo Geométrico en la Construcción de las Nociones Trigonométricas. Acta Scientiae., 24(4), 81-108*https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6911

[8] Goulet, R.(2005) *Dictionnaire des Philosophes Antigues. París: C. N. R. S. ÉDITIONS.* https://doi.org/10.4000/philosant.825

[9] Henderson, D., y Taimina, D. (2004) *Experiencing Geometry. Euclidean and Non - Euclidean with History. Pearson.*https://doi.org/10.3792/euclid/9781429799850

[10] Junius, P. (2008) *A case example of insect gymnastics: how is non-Euclidean geometry learned? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39(8), 987-1002.* https://doi.org/10.1080/00207390802136529

[11] Kattsoff, L. O. (1960) *Problems in presenting non-Euclidean geometries to high school teachers. The Mathematics Teacher, 53(7), 559–563.* https://www.jstor.org/stable/27956249

[12] Lénárt, I. (1996) *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere. Investigations in Planar and Spherical Geometry. United States of America: Key Curriculum Press.*

[13] Lénárt, I. (2021) *Hyperbolic geometry in general education: comprehending the incomprehensible. Journal of Physics: Conference Series, 1-15.* https://doi.org/10.1088/1742-6596/1946/1/012005

[14] López-Acosta, L., y Montiel-Espinosa, G. (2022) *Emergencia de las ecuaciones paramétricas en viète y descartes: elementos para repensar la actividad analítica-algebraica. Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 17(3) 539-559.*https://doi.org/10.14483/23464712.17062

[15] Lovis, K., Franco, V., y Barros, R. (2014) *Dificuldades e obstáculos apresentados por um grupo de professores de Matemática no estudo da geometria hiperbólica. Zetetiké – FE/Unicamp, 22(42), 11-29.* https://doi.org/10.20396/zet.v22i42.8646565

[16] Navarro, J. (2005) *Los elementos de euclides. Un Paseo por la Geometría 2002/2003, 55 – 82. España: Real Sociedad Matemática Española.*https://www.academia.edu/22625610/Los_Elementos_de_Euclides

[17] Pinto, J. (2013) *Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. Educação Matemática Pesquisa, 15(3), 647-670.*https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16187

[18] Rashed, R., y Papadopoulos, A. (2017) *Menelaus' Spherics. Early Translation and al-Māhānī / al-Harawī's Version. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH.* https://doi.org/10.1515/9783110571424

[19] Sidoli, N. (2018) *Greek Mathematics. En A. J. (ed), The Cambridge History of Science, 345 - 373. Cambridge University Press.*https://doi.org/10.1017/9780511980145.020

[20] Silva, P., y Yonezawa, W. (2017) *A geometria euclidiana e as geometrias não-euclidiana numa visão epistemológica segundo a filosofia de bachelard. Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino, 1(1), 141-156.*https://seer.uenp.edu.br/index.php/reppe/article/view/905

[21] Smith, R. (1975) *The Alexandrian Scientific Tradition, 14 – 21.* https://journals.co.za/doi/pdf/10.10520/AJA03031896_274

[22] Soares, I., Antunes, J., Soares, L., Ferreira, L., y Crisostomo, E. (2020) *O uso de materiais manipuláveis na consolidação de conceitos de geometria esférica. En J. Batista, Ensino de ciências e educação matemática, 71-83. Paraná, Brasil: Atena Editora.*https://doi.org/10.22533/at.ed.152201606

[23] Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2021) *Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. Educación Matemática 33(3), 202-232.* https://doi.org/10.24844/EM3303.08

[24] Vega, Y. (2013) *Resolución de problemas geométricos en el aula usando el método de análisis y síntesis (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.* https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21355

[25] Vidal, R. (2024) *Trazando el camino: Integración de la Historia de las Matemáticas en la formación docente para un cambio de paradigma. Revista de Matemáticas, Ensino e Cultura – REMATEC, (49), e2024006.* https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n49.e2024006.id661

[26] Wardhaugh, B. (2010) *How to read Historical Mathematics. New Jersey, United States: Princeton University Press.*

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TRUJILLO

UNT

ISSN:3084-7761

Depósito legal:Nº2025-05146